This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

QA
841
.R75

5.7.12

Lo. 244
Catal. Rolle.

# DE CORPORUM MOTU

## RECTILINEO, ET CURVILINEO

in mediis non reſiſtentibus

LIBRI DUO:

AUCTORE

D. CŒLESTINO ROLLO

CONGREGATIONIS CŒLESTINORUM ORDINIS S. BENEDICTI

*Abbate, & Bononienſis Scientiarum Academiæ Socio.*




VENETIIS,

Apud PETRUM BASSALEAM.

---

M D C C L.

*SUPERIORUM PERMISSU.*

*NOBILISSIMO VIRO*

# MARCHIONI CAROLO GRASSIO

Bononiæ Senatori Ampliſſimo,

Library com.
Perella
5-22-24

ALOYSIUS DEL GIUDICE
Monachus Cœleſtinus.

FELICITATEM.

*COgitanti mihi cui potiſſimum Opuſculum hoc inſcriberem, cujus ſub auſpiciis tuto poſſet lucem aſpicere, non fuit multum ambigendum. Dum enim id animo pervolvebam, illico mihi (Ampliſ. Senator)*

*Tute obtuliſti, cui me non tam officium præſtare intelligebam, quam illud exiſtimabam, ea ſcilicet re ſatis magnum campum tibi dare, in quo & gratus animus tuus, & doctrina ſingularis excurrere latius, atque cognoſci poſſet. Opuſculum porro iſtud dudum inchoatum, ſed alio ſtudiorum, & laborum genere Auctorem interpellante ad umbilicum nuſquam perductum, eſt viri Celeberrimi Cœleſtini Rollii meæ Congregationis Monachi, cujus eruditionis fama permotus, dum Piſis celebri Urbe, optimiſque artibus affluente Matheſin profiteretur, Tu, qui vel adoleſcens plurimum ſummis viris tribueres, in eorumque familiaritatem venire ſatagebas, in illius diſciplinam tradidiſti: ipſe vero tenellum ingenium tuum ab ineunte adoleſcentia Geometricis do-*

*ctri-*

*ctrinis excoluit, atque informavit. Ad neminem igitur magis, quam ad Te (Vir Nobiliſſime) Opuſculum iſtud adtinet; tua intereſt, ut Præceptoris tui Mechanicæ iſtæ lucubrationes, quas ille olim Tibi interpretatus eſt, Te patronum nanciſcantur virum in republica litteraria non uno nomine conſpicuum, qui auctoritate, ſapientia, atque jure neceſſitudinis illas communiat, atque tueatur. Nam ut illud agerem nomen etiam tuum me impulit, quo & patriam tuam, Urbem nobiliſſimam, artiumque omnium, ac ſcientiarum Altricem, & ævum hoc noſtrum mirum in modum illuſtras, non tam quidem ob genus ſummum, quo natus es, quam ob præclariſſimas animi tui dotes, ob præſtantiſſimum Tibi plaudentibus omnibus delatum Senatoris Munus, aliaſque ob*

*cauſſas, quæ tot, ac tantæ ſunt, ut ad eas pro dignitate pertexendas vix primi oratoris vires ſufficerent. Argumentum etiam ipſius opuſculi in cauſſa fuit, ut tui nominis ſplendore illud auſerim illuſtrare: Sanioris ibi Philoſophiæ ſpecimen exhibetur, veræ motus leges ad accurate, ac utiliter philoſophandum traduntur, & demonſtrantur; non poterit igitur Tibi oblectamento non eſſe, qui etſi aliis ſtudiorum generibus quotidie operam des, iis præſertim quæ ad publicum jus, ad morum philoſophiam, & ad patriæ tuæ negotia dextre gerenda, iis nihilominus philoſophica, ac Mathematica ſtudia ſemper conjunxiſti, hæc ſemper amaſti, pro iſtis ac aliis diſciplinis talis, ac tantus tibi inceſſit ardor, ut domus tua litteratis hominibus, maximeque Philoſophis nul-*

*lo non tempore pateat, quo illi octavo quoque die ultro eo conſilio ventitant, ut de iis apud te agant, quæ & cognitione jucundiſſima, & ipſa re utiliſſima eſſe facile intelligimus. Accedit tandem ut in Bononienſi hac ſcientiarum Academia, præclariſſima illa quidem, præceteriſque Italicis florentiſſima, me ſcilicet cum ipſo Rollio ſocium habeas. Quod quanti ſit ut mutuo omnibus in rebus tueri velimus, etiam tacente me, Tute ipſe omnino cognoſcis. Jure itaque (Ampliſs. Senator) Matheſis in hoc Rollii opuſculo Te adit, a teque in fidem recipi optat, quæ Te ad animi præſtantiam, & ad gloriæ faſtigium evexit; ipſa enim matheſis Tibi plurimum in ejus exercitatione verſato, contulit illam mentis aciem, qua rite de rebus omnibus judicas, multoque me-*

*lius ratiocinia tua componas; ipſa ſummæ, qua polles gerendarum rerum intelligentiæ, ſcientiiſque omnibus quibus præfulges, laudatiſſimum illum geometricum ordinem dedit, quo idoneum Te reddidiſti tum in ſcientiis adipiſcendis, cum in iis præſtandis, quæ ad vitæ cultum referuntur. Patere igitur (Ampliſ. Senator) Opuſculum hoc Tibi devoveri, & Rollii noſtri Mechanicas lucubrationes Tuo validiſſimo patrocinio munitas publicam lucem adſpicere, quas ſi pro tua humanitate exceperis, ego quidam & Rollius noſter immortale beneficium a Te nos conſecutos fuiſſe gloriabimur. Vale.*

Dabam Bononiæ Calendis Februarii MDCCL.

FRAN-

# FRANCISCUS MARIA ZANOTTUS

*Regiæ Monſpellienſis Academiæ Socius, Bononienſis ſcientiarum Inſtituti atque Academiæ q. Secretis, Litteratiſſimo Præſtantiſſimoque Viro*

## ALOYSIO DEL GIUDICE

## S. P. D.

PRæclarum Cœleſtini Rollii ingenium, ſingularemque in mathematicis diſciplinis dexteritatem jam inde ab ineunte ætate vehementer mirabar; cum mihi de illo ſæpe narraret Euſtachius Manfredius, Vir, ut tu ſcis, omni litterarum genere excultus, præceptor meus, eumque ſummis laudibus proſequeretur. Itaque vehementer dolui, cum illum audivi ab his ſtudiis, quæ ego olim colueram, amavi poſtea ſemper, animum penitus abſtraxiſſe, quæque ad mechanicam ſcientiam illuſtrandam (de quibus præſertim ex Manfredio cognoveram) ſcriptis mandaverat, de manu poſuiſſe. Nam quamvis eadem fortaſſe poſtea ab aliis præclariſſimis excellentiſſimiſque Mathematicis vel inventa fuerint, vel aucta, & in publicam lucem emiſſa, e re tamen Italiæ erat, & ſpectatiſſimi Ordinis tui, ut Rollii ingenium ne lateret. His rebus intelliges, Ornatiſſime, & Præſtan-

tiſſime Aloyſi , nihil mihi gratius accidere potuiſſe , quam quod paucis ante diebus ſignificaſti , te & antiquum Rollii ſcriptum ab ipſo accepiſſe , & de editione cogitare . Eoque majorem voluptatem cepi , cum illud mihi dediſti , ut voluerem ; nam quamvis in reconditiſſimas illas ſupputationes , quæ in eo paſſim occurrunt , inſinuare me vix poſſem , plane tamen intellexi , & res in eo tractari pulcherrimas ; & ingenioſiſſime , atque etiam , ut illud tempus ferebat , breviſſime explicari ; & omnia cum inter ſe , tum vero receptiſſimis Mechanicorum principiis conſentire . In quo minime vereor , ne fallar ; nam & idem ſenſiſſe intellexi , Vincentium Riccatum , Mathematicum e Soc. Jeſu longe maximum , cum librum totum diligentius conſideraſſet ; cujus hominis ſententiam cum audiverim , aliorum judicium non requiro . Perge igitur , Aloyſi Ornatiſſime , ac Præſtantiſſime , atque editionem hanc urge & nobis gratiſſimam , & Rollio noſtro , & tibi , & univerſo Ordini tuo glorioſiſſimam . Vale . Bononiæ. Id. Oct. MDCCXLIX.

EDI-

# EDITORIS PRÆFATIO AD LECTOREM.

ANtequam, eruditiſſime Lector, ad hunc, qui modo in lucem prodit, librum de motibus in medio non reſiſtente, legendum accedas, opportunum eſſe judico, ut de tempore, quo ſcriptus eſt, paucis admonearis. Auctor clariſſimus D. Cœleſtinus Rollius meæ Congregationis Abbas, quum illis, quæ a Nevvtono viro ſummo inventa, & edita ſunt, maxime delectaretur, pleraque quæ identidem in mentem venerant, & meditando nactus erat, methodo opportuna diſponens, in hujuſmodi libellum congeſſit. Etenim conſiderans ſæpenumero, & cogitatione contemplans, quæ ab acutiſſimo illo Philoſopho, ac Mathematico in publicum ſunt emiſſa, animo reputabat, multa

ta inveniri, quæ ſtrictim, atque ſi ita loqui fas eſt, jejune expoſita eſſe, multa, quæ propter rerum ſublimitatem obſcuritate non carere videbantur. Quare cepit ſingula diligentius evolvere, & clare, ac dilucide rectam ſequutus methodum demonſtrare; non tam ut aliis, quam ut ſibimetipſi opitularetur, lucemque afferret. Itaque ante quinque & viginti circiter annos commodo quodam, ac privato ſtudio liber eſt abſolutus. Auctor autem opus ſuum apud ſeſe ſanctiſſime ſervavit, neque ulli legendum permiſit, ſi amicos paucos excipias, quos non minus doctrina, quam moribus ſibi probatos eſſe cognoverat. Inter hos, honoris cauſſa, liceat nominare Euſtachium Manfredium publicum in Bononienſi Academia Aſtronomiæ Profeſſorem, cujus deſiderium diuturnitas temporis nondum abſtulit, memoriam vero nulla unquam delebit ætas.

Poſt id temporis Auctor noſter nonnullis de cauſſis permotus, quas neceſſe non eſt palam facere, mathematica ſtudia prorſus deſeruit, & ad

alia

alia longè , multumque diverſa pro virili parte ſe contulit , in quibus tantum profecit , quantum pro acerrimo, quo præditus eſt ingenio, erat expectandum. Interea liber de motibus in medio non reſiſtente in tenebris , & in privatæ auctoris bibliothecæ pulvere procul a Geometrarum oculis latebat. Neque ex eo pulvere erutus eſſet unquam , niſi ipſe fortuito incidiſſem in opus manuſcriptum Euſtachii Manfredii, quod propediem lucem aſpexit , in quo de Auctoris noſtri libro, non ſine comendatione mentio fiebat . Cepi interrogare Auctorem de libro ; precibus impetravi ut ad me mitteretur . Acceptum legi , aliis item doctis viris legendum præbui ; non indignus viſus eſt , qui Geometrarum omnium judicio committeretur. Scripſi ad Auctorem , ut typis mandari permitteret, obſtitit ille principio , at denique crebris efflagitationibus a viro præſtantiſſimo nec modeſtia minus , quam eruditione ſumma inſigni , impetravi , ut libellum hunc prodire pateretur . Hæc conſiderans , erudi-

tiſ-

tiſſime Lector, mirari jam deſine, cur tam ſero opuſculum iſtud in publicam lucem emergat.

Si eo tempore, quo ſcriptus eſt, liber typis mandatus eſſet, nonnulla ſine dubio contineret, quæ propter novitatem Geometris probarentur. Verum quum interea temporis plurimi, iique acutiſſimi Geometræ eamdem ſpartam adornaverint, quum novis, atque ingenioſiſſimis inventis locupletaverint, nihil jam invenies in hoc opere, quod ab aliis prius non didiceris; imo multa, quæ jam detecta ſunt, & ſatis cognita in eodem deſiderabis. Nihilo tamen ſecius, ſi Auctorem transferas ad ea tempora, quibus ſcribebat, facile cognoſces non ſolum quantum ingenio poſſet, ſed etiam quantum ſcientia præſtaret, quantumque ab eo ſperandum fuiſſet, niſi maximo Geometriæ, & Analyſeos incomodo aliud ſtudiorum genus fuiſſet aggreſſus.

Quod ad opus ipſum ſpectat, quum artium, diſciplinarumque non modo veritates, ſed & varias methodos cognoſcere expediat, adparebit, opu-

ſcu-

ſculum hoc non exiguum in præſens rei mathematicæ adjumentum afferre, ſuaque utilitate non carere. In hoc enim omnia quæ pertinent ad motus in medio non reſiſtente cum rectilineos, tum curvilineos, clare ac dilucide ex paucis, iiſque ſimpliciſſimis principiis demonſtrata reperies. Plures hypotheſes virium ad centrum tendentium, & diverſam cum diſtantiis rationem ſervantium pro virili parte perſequitur. In ſingulis quid accidat corporibus cum ſponte deſcendentibus, tum projectis geometrice manifeſtat. Illud autem ſingulare, ac præcipuum in hoc opere videtur, quod quum projectum corpus in eadem virium hypotheſi per curvas natura admodum diverſas pro circumſtantiarum diverſitate iter faciat, pleniſſimum negotii erat determinare quibuſnam in circumſtantiis determinata quæpiam curva deſcriberetur. Hoc præſtat auctor non paucis quidem, ſed ita clare, ut ejus methodus plurimi facienda eſſe videatur.

In hiſce autem doctrinis exponen-

dis

dis adhibet Auctor analyticam nedum recentiorum artem, ſed & veterum ſyntheticam demonſtrandi rigidam rationem; quæque ab ipſo analytica methodo per calculum prius inveniuntur, ea poſtea ſuppreſſo calculo more veterum ſynthetice demonſtrantur; ratus analyſin ad inveniendum quidem conferre plurimum, ſed ad docendum, & ad mentis capacitatem augendam, eamque perficiendam, eſſe ſynthesim longe accomodatiorem: Quod ſane paucis, iiſque Mathematicis ſummis contigiſſe videtur, ut methodo utraque ſimul elaborarent; adhibendo videlicet & illam aptam inveniendi, & hanc acutam demonſtrandi rationem.

Frequens eſt in hoc opuſculo curvarum uſus in deſignandis viribus, velocitatibus, ſpatiis, temporibus aliiſque motus functionibus juxta methodum jamdiu a mathematicis uſurpatam. Et quia ubi de curvis agitur contrahuntur admodum, facileſque redduntur demonſtrationes, ſi indefinite parvorum methodus adhibeatur, hinc & eadem crebro auctor utitur,

ſup-

ſupponendo nimirum curvam veluti polygonum quoddam laterum infinitorum, & indefinite parvorum, quorum alterum ſi producatur curvam in puncto tangit; quam ſane hypotheſim a vero non abludere, quinimo naturæ, ac geneſi curvarum admodum conſentaneam eſſe, non ſemel demonſtrarunt ſummi Geometræ. Tamen etſi Rollius ſub hac hypoteſi utplurimum curvas repræſentat, eas tamen aliquando conſiderat ut aggregata infinitorum, & indefinite parvorum arcuum, qui ad totidem circulos referantur, juxta celeberrimam hugenianam doctrinam de lineis evolutis, & evolvendis.

Tandem monitum hic volo lectorem, auctorem noſtrum ad facilius indefinitorum methodum adminiſtrandam, eam differentiali, ac integrali calculo ſubmittit juxta præſcriptos a Geometris hac de re ſubtiliſſimos canones. Hæc methodus difficultatem proculdubio faceſſet minus adſuetis analyſi ſive finitorum, ſive infinitorum; at iſti neglectis problematum analyticis ſolutionibus, eorumdem ſyn-

# D. JOSEPH MARIA TURCO

## ABBAS GENERALIS

**Congregationis Monachorum Cœleſtinorum Ordinis S. BENEDICTI.**

ATtenta relatione a duobus e noſtris Monachis facta, de Opere a P. D. Cœleſtino Rollo, Abbate S. Crucis de Lycio, compoſito, cui titulus: *De motu corporum rectilineo, & curvilineo in mediis non reſiſtentibus*; facultatem, quantum ad nos pertinet, facimus P. D. Aloyſio de Judice, ſupradictum librum in lucem edendi.

*Datum ex noſtro Collegio Cœleſtino de Urbe, die 2. Januarii* 1750.

D. Joſeph Maria Turco Abbas Generalis.

Loco ✠ Sigilli.

*D. Joannes Giannettinus Secr.*

LI-

# LIBER PRIMUS.

## De Corporum motu rectilineo in mediis non reſiſtentibus.

§. 1. UT corpus moveatur a vi aliqua agi debet, quæ ſi eſt ab agente externo ſemel impreſſa motus oritur in mediis non reſiſtentibus æquabilis & rectilineus; verum ſi vis perpetuo agat & indeſinenter corpus urgeat in eamdem directionem, ſive vis eadem ſemper ſit & conſtans, ſive mutabilis juxta quamlibet legem, oritur motus rectilineus acceleratus.

§. 2. Porro à quonam principio vis hæc ortum ducat, nihil refert in mathematicis contemplationibus, ſive enim ab agente externo aut circumfuſo fluido immediate corpus impellatur, ſive ab interno principio movente agitetur, ſive principium quoddam activum in fixo loco manens agat in diſtans & corpora circumpoſita ad ſe trahat aut a ſe repellat, perinde eſt, modo effectus idem habeatur, corpus videlicet certa quadam lege moveatur. Juvat autem ad rem mathematice tractandam motum corporum referre ad punctum aliquod fixum veluti ad *centrum virium*, ex quo in orbem diffuſa virtus obviis corporibus vim inge-

rat, quæ *vis centralis* generatim vocari poteſt, & ſi quidem corpora ad centrum trahat *vis* erit *centripeta*, ſi a centro repellat erit *vis centrifuga*.

§. 3. Itaque ſi motum corporis rectelineum referamus ad centrum aliquod virium, centrum hoc collocari debet in recta linea quæ ſit directio ipſa motus. Tria vero in eo motu conſiderari poſſunt 1. *vis centralis* qua corpus urgetur, 2. *velocitas* in quolibet ſpatii percurſi puncto. 3. *tempus* per quamlibet ſpatii partem. Areæ curvilineæ vel rectilineæ, quarum ordinatæ normales ad ſpatium ſeu rectam per quam corpus movetur ſunt ut *vires centrales*, ſive ut *velocitates*, ſive ut *tempora*, dicantur *Scalæ virium centralium*, ſive *velocitatum*, ſive *temporum*.

# PROPOSITIO I.

## THEOREMA.

§. 4. MOveantur duo corpora ex quiete in punctis A & M per rectas AB, MN urgentibus viribus, quæ ſint in quibuſcumque punctis Q & L ut ordinatæ QP, LK ad areas ABDC, MNGF; dico hujuſmodi areas eſſe inter ſe in duplicata ratione velocitatum BE, NH acquiſitarum in punctis B, N. Areas ABDC, MNGF appello *ſcalas virium*. (Fig. 1.)

Velocitates in quibuslibet rectarum ſeu ſpatiorum percurſorum punctis Q, L ſint ut QT, LR ordinatim applicatæ ad areas ABE, MNH, quas proinde voco *ſcalas velocitatum*. Sint vero Qq, Ll partes quælibet infinite parvæ ſpatiorum percurſorum AB, MN; quæ proinde partes

tes Qq, Ll percurruntur velocitatibus QT, LR; interimque urgentibus viribus QP, LK addantur velocitatum incrementa infinite parva at, br, ita ut in punctis q, l velocitates ſint qt, lr. Tum ſuper velocitate BE facto triangulo rectangulo iſoſcele EBX, ex punctis T, t, ducantur adAX parallelæ TO, to, & ex punctis O, o ad ED parallelæ OI, oi, ita ut ſint at, mo, mO inter ſeæquales. Eademque conſtructio fiat in altera figura.

§. 5. His poſitis ſciendum eſt, vires quaſcumque QP, LK eſſe inter ſe directe ut velocitatum augmenta infinite parva at, br, & reciproce ut tempora quibus percurrendo ſpatiola Qq, Ll, augmentailla velocitatum infinite parva acquiruntur. Siquidem dupla vis duplam eodem tempore celeritatem gignit, & tripla triplam; ſimiliterque eadem celeritas a dupla vi ſubduplo tempore gignitur, a tripla ſubtriplo, & univerſe in dato tempore vis eſt ut celeritatis augmentum, & dato celeritatis augmento vis eſt reciproce ut tempus, quo augmentum illud gignitur; quare neutro dato, ratio virium componitur ex directa celeritatum acquiſitarum, & ex reciproca temporum.

§. 6. Item ſpatia infinite parva Qq, Ll quæ celeritatibus QT, LR percurruntur, ſunt in ratione compoſita harum celeritatum QT, LR, & temporum quibus ſpatia illa percurruntur.

Quare ratio rectangulorum PQq, LKl, ſeu ſpatiolorum infinite parvorum PQqp, KLlk, quæ componitur ex ratione laterum QP, LK, & Qq, Ll, eadem erit ac ratio rectangulorum QT×at, LR×br, hoc eſt rectangulorum Im ad Zn, ſeu ſpatiolorum infinite parvorum IOoi ad ZSsz. Idem demonſtrabitur de ceteris ſpatiolis PQqp, KLlk, ex quibus componuntur areæ ſeu ſcalæ virium ABDC, MNGF, proportio-

nalia ſcilicet eſſe correſpondentibus ſpatiolis IOoi, ZSsz, ex quibus componuntur triangula EBX, HNY. Ergo ſumendo omnes antecedentes & omnes conſequentes terminos utriuſque proportionis erunt areæ ſeu ſcalæ virium ABDC, MNGF ut triangula EBX, HNY; hæc autem triangula ſunt dimidia quadratorum velocitatum BE, NH: quare conſtat quod demonſtrandum propoſuimus.

§. 7. Idem analyticis notis expreſſum ſic breviter demonſtratur. Ponatur ſpatium $AQ=x$, vis $QP=f$, velocitas $QT=u$, tempus per AQ $=t$; incrementa infinite parva ſpatii $= dx$, velocitatis $= du$, temporis $= dt$: eritque per ſupra explicata $f=\frac{du}{dt}$ & $dx=$, $udt$; quare $fdx=udu$, & $S.\ fdg=\frac{1}{2}uu$, hoc eſt ſcala virium ut quadratum velocitatis.

---

## PROPOSITIO II.

### THEOREMA.

§. 8. IN motu corporum per AB, MN, ſi areæ ABIZ, MNOX habeant ordinatas
Fig. 2. quaſcumque QP, LK reciproce proportionales velocitatibus QT, LR: dico tempus per AB ad tempus per MN eſſe ut area ABIZ ad aream MNOX. Has areas appello *ſcalas temporum elementarium*.

Nam tempora quibus percurruntur ſpatiola quælibet infinite parva Qq, Ll ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum Qq, Ll, & ex

reci-

reciproca velocitatum LR, QT, ſeu (per conſtructionem) directa applicatarum QP, LK, quæ rationes componunt rationem rectanguli PQq ad rectangulum KLl, ſeu areæ infinite parvæ PQqp ad aream KLlk. Idem demonſtrabitur de ceteris temporibus infinite parvis quibus percurruntur partes infinite parvæ ſpatiorum AB, MN, quod ſcilicet proportionalia ſint reſpondentibus areolis infinite parvis arearum ABIZ, MNOX: ergo ſumendo omnes antecedentes, & omnes conſequentes terminos utriuſque proportionis erit tempus per AB ad tempus per MN ut area ABIZ ad aream MNOX. Q. E. D.

§. 9. Poſitis iiſdem ac in ſuperiore propoſitione analyticis notis, itemque QP=z, erit $dt = \frac{du}{u} =$ (ex conſtructione) zdx; quare t= S. zdx. Q. E. D.

---

## PROPOSITIO III.

### PROBLEMA.

§. 10. Data lege ſeu ſcala virium centralium in corporis motu rectilineo, ſcalas velocitatum, temporum elementarium, & temporum integrorum ab initio motus analytice determinare. Fig. 3.

Decidat corpus ex quiete in puncto A recta ad centrum virium centripetarum S, ſitque DE ſcala virium, AF velocitatum, LG temporum elementarium, AH temporum integrorum ab initio motus: ponaturque abſciſſa communis a centro virium SB =x, ordinata ad ſcalam virium BE=f, ad ſcalam velocitatum

tum BF$=u$, ad ſcalam temporum elementarium BG$=z$, ad ſcalam temporum integrorum BH $=t$, & diſtantia centri ab initio motus SA$=a$.

Eritque area BEMS æqualis ſummæ applicatarum BE in differentias abſciſſarum SB, hoc eſt S. fdx: Et quoniam motus incipit ex quiete in puncto A, ſi area conſtans ADMS ponatur æqualis quantitati Q, erit ADEB$=Q-$ S. fdx: quare (§.4.) quadratum velocitatis BF, ſcilicet $uu=Q-$S. fdx, quæ eſt æquatio ad *ſcalam velocitatum*. Ejuſque reciproca (§. 8.) BG

$$=zz=\frac{1}{Q-S.fdx}$$ erit æquatio ad *ſcalam temporum elementarium*, cujus ordinata AL in puncto A initio motus debet eſſe aſymptotus infinita, eſt enim reciproca velocitatis, quæ in eodem puncto A eſt infinite parva: at vero ſpatium aſymptoticum GLAB licet ad partes L infinite longum, tamen ſemper eſt finitæ quantitatis, ſiquidem proportionale tempori caſus per AB ex quiete in puncto A, vires autem centrales quibus percurritur ſpatium AB ſupponuntur finitæ. Itaque tempus integrum per AB erit ſumma temporum elementarium (§. 8.), hoc eſt ordinatarum BG in differentias infinite parvas abſciſſæ AB ab initio motus: cumque AB æquetur AS $-$ SB, hoc eſt $a-x$, ejus differentiale erit$-dx$, quare tempus elementare erit $-zdx=\frac{-dx}{\sqrt{Q-S.fdx}}$, & BH$=t=$S.

$$\frac{-dx}{\sqrt{Q-S.fdx}}$$

quæ eſt æquatio ad *ſcalam temporum integrorum*. Hoc vero integrale habere debet ſignum affirmativum ut deſignet ſpatium ALGB, hoc eſt

tem-

tempus ab initio motus: nam ſi habebit ſignum negativum deſignabit ſpatium GSB, hoc eſt tempus per ſpatium decurrendum BS uſque ad centrum S.

§. 11. Si vis ſit centrifuga corpus non urgebitur ad centrum S, ſed ab eo repelletur: quare prædictæ curvæ ad partes ſuperiores puncti A deſcribendæ ſunt, nimirum curva EDe *ſcala virium centrifugarum*, Af *velocitatum*, lg *temporum elementarium*, & Ah *temporum integrorum ab initio motus*; in quo caſu area SMeb, hoc eſt S.fdx eſt major area SMDA, quæ poſita eſt æqualis quantitati Q; quare area ADeb erit $=$ S. fdx $-$ Q, & quadratum bf $=$ uu $=$ S. fdx $-$ Q; atque quadratum bg $= zz = \frac{1}{S.fdx - Q}$; & demum bh $= t =$ S. $\frac{dx}{\sqrt{S.\,fdx - Q}}$; quæ ſunt æquationes ad ſupradictas curvas exiſtente vi centrifuga.

§. 12. In his porro æquationibus tam pro vi centripeta quam pro vi centrifuga, ſi loco f ponatur ejus valor datus ex data vis centralis lege, ſeu ex data æquatione ad curvam EDe ſcalam virium centralium, emergent in quæſtionibus particularibus prædictarum ſcalarum æquationes differentiales non ſemper tamen integrabiles.

§. 13. Valor quantitatis Q in ſupradictis æquationibus ſumptæ loco areæ conſtantis ASMD reperitur in quæſtionibus particularibus ope ſubſtitutionis valoris f; ſiquidem in puncto A ubi corpus moveri incipit ex quiete velocitas nulla eſt, quare uu $=$ o, ex quo colligitur in æquatione ad ſcalam velocitatum tam in vi centripeta quam in vi centrifuga Q $=$ S. fdx: ſi ergo

diſtantia SA centri virium ab initio motus, quæ poſita fuit=a, ſubſtituatur loco x in integrali S. ſdx, habebitur valor quæſitus Q. Animadvertendum tamen eſt hanc quantitatem Q in pleriſque virium centralium hypotheſibus eſſe infinitam, aut ſumendam eſſe ad partes ſuperiores ordinatæ AD, ut infra in exemplis.

## SCHOLION.

§. 14. QUæ hactenus allatæ ſunt formulæ pertinent ad motum corporum eadem vi centrali ad idem centrum tendentium, & moveri ex quiete in eodem puncto incipientium. Nam ſi diverſæ ſint in duobus corporibus vires centrales, aut ſi in eadem vi motum exordiantur ex quiete in diverſis a centro diſtantiis, adhibenda tum erit conſtructio, quam generalius exhibuimus Prop. 1. & 2. videlicet ſi conferendi inter ſe ſint motus duorum corporum, quorum alterum per ſpatium AB, alterum per MN moveantur, non ſufficit ſcalas virium centralium CD, FG ita conſtruere ut inquibuslibet ejuſdem ſpatii punctis vires ſint ut reſpondentes ordinatæ ad ſuam ſcalam virium, ſed oportet etiam ut ejuſmodi ſcalæ (quas *reſpectivas* ſeu *relativas* appello) ita inter ſe reſpondeant, ut vis in quolibet puncto Q unius ſpatii ſit ad vim in quolibet puncto L alterius ſpatii ut ordinata QP ad ordinatam LK: tumque erunt velocitates BE, NH in ſubduplicata ratione arearum ABDC, MNGF quemadmodum demonſtratum eſt in prima prop. Scalæ vero *relativæ* temporum elementarium IPZ, OKX ita conſtruendæ erunt ut celeritas QT in quolibet puncto Q unius ſpatii ſit ad celeritatem LR in quolibet puncto L alterius ſpatii

(Fig. 1.) (Fig. 2.)

reci-

reciproce ut ordinata LK ad ordinatam QP: tumque tempus per AB ad tempus per MN erit ut area ABIZ ad aream MNOX, uti demonſtratum eſt in ſecunda propoſit.

Moveantur duo corpora diverſa lege virium centralium per eamdem rectam MAB, in cujus puncto quolibet Q vires ſint ut ordinatæ QP, QK: tum vero ſi per puncta P, K conſtruantur ſcalæ virium XPO, ZKI, quæ datas virium centralium leges repreſentent, erit vis unius corporis in quolibet puncto A ad vim alterius corporis in quolibet puncto M ut ordinata AZ ad MX: nam vis in A unius corporis ad vim in Q ejuſdem corporis eſt ut AZ ad QK; item vis hujus corporis in puncto Q ad vim alterius corporis in eodem puncto Q eſt ex conſtructione ut QK ad QP; & demum vis alterius corporis in Q ad vim ejuſdem corporis in M ut QP ad MX; ergo ex æquo vis unius corporis in A ad vim alterius corporis in M eſt ut AZ ad MX. Poſita ergo hac conſtructione erunt inter ſe velocitates horum corporum in quibuslibet punctis in ſubduplicata ratione arearum correſpondentium ab initio motus uti in prima propoſitione. Fig. 4.

Itaque in quolibet puncto Q velocitates corporum cadentium ex quiete in datis punctis quibuslibet A, M ſunt in ſubduplicata ratione arearum AQKZ, MQPX: ſint ejuſmodi velocitates QR, QN: & per puncta R, N compleantur ſcalæ velocitatum RA, NM in utraque lege virium requiſitæ, habebimus hujuſmodi ſcalas velocitatum AR, MN *relativas*, quæ ita inter ſe reſpondent ut velocitas in quolibet puncto Q corporis cadentis ex quiete in A cujus ſcala virium ZKI ſit ad velocitatem in quolibet puncto E corporis cadentis ex quiete in M cujus ſcala virium XPO ut ordinata

QR

QR prioris ſcalæ velocitatum AR ad ordinatam EF alterius ſcalæ velocitatum MN.

Quibus poſitis fiat in quolibet puncto Q ut velocitas QR corporis cadentis ex A ad velocitatem QN corporis cadentis ex M ita quævis QD ſumpta ad arbitrium ad QC; atque per punctum D conſtruatur curva DY reciproca ſcalæ velocitatum NM, & per punctum C curva CS reciproca ſcalæ velocitatum RA: eruntque hujuſmodi curvæ DY, CS ſcalæ temporum elementarium *relativæ* ita conſtructæ ut ordinatæ quomodocumque ſumptæ ad ſcalas velocitatum reciproce reſpondeant ordinatis ad ſcalas temporum elementarium: quare per ſecundam Prop. (§. 8.) tempora motus horum corporum per quaslibet ſpatii partes erunt ut areæ correſpondentes in ſcalis temporum elementarium.

§. 15. In puncto F ſi conveniant inter ſe ſcalæ velocitatum AR, MN, ordinata FE erit communis, ſcilicet in puncto E eadem eſt velocitas corporum cadentium ex punctis A, M: ac proinde areæ ad ſcalas virium AELZ, MEHX erunt æquales, & viceverſa ſi in quolibet dato puncto E ſumantur in utraque ſcala virium areæ æquales inter ſe EAZL, EMXH erunt in eo puncto E æquales velocitates corporum cadentium ex quiete in punctis A, M.

§. 16. Si altera harum virium puta AZ ſit conſtans, ſcala virium ZAQK erit rectangulum, & ſcala velocitatum AFR parabola; atque ſcala temporum elementarium CS hyperbola cubica, ſpatiumque SGEAZ duplum rectanguli AE×EG uti infra in exemplo I. clarius explicabitur: itaque ſumpto in altera ſcala virium XH ſpatio XMEH æquali rectangulo ZAE velocitas in E corporis cadentis ex M cujus ſcala virium XH æqualis erit velocitati corporis vi conſtanti AZ

ti AZ cadentis per AE; & tempus deſcenſus hujus corporis motu uniformiter accelerato per AE erit ad tempus deſcenſus per quamlibet ſpatii partem EQ alterius corporis ut 2AE × EG ad aream EGDQ.

§. 17. Quoniam areæ ad ſcalas virium AELZ, MEHK æquales eſſe debent ut eamdem celeritatem EF acquirant corpora ex A & M cadentia; ſi vis altera puta AZ ſit infinita reſpectu virium ſcalam MEHX componentium, erit ſpatium AE vi infinita AZ percurſum infinitè parvum: ut ergo vis AZ unico iſtu & momento temporis in puncto E tantam corpori tribuat velocitatem EF quantam corpori acquiritur motu quolibet accelerato per ME, infinitam rationem habeat oportet ad vires acceleratrices ſcalam MEHX componentes.

Si velocitatem EF motu quocumque accelerato per ME acquiſitam corpus conſtanter retineat, & per EB motu uniformi progrediatur, ſcala velocitatum erit rectangulum EFTB *relativa* ad ſcalam velocitatum MFE motus accelerati: atque adeo ſcalæ temporum elementarium *relative* erunt rectangulum EGVB, & area MYGE: eſt igitur area MYGE ad rectangulum EGVB ut tempus motus accelerati per ſpatium ME ad tempus motus uniformis per ſpatium EB velocitate EF ultimo acquiſita deſcriptum.

EXEM-

# EXEMPLUM I.

*Sit vis centralis conſtans qualis eſt gravitas in Telluris ſuperſicie: quæritur ſcala velocitatum & temporum ab initio motus.*

SIt centrum virium S, & corpus decidat ex quiete in puncto A vi conſtanti impulſum in quacumque a centro diſtantia, quævis exprimatur per rectam AD: erit rectangulum SADM ſcala virium centralium. Fig. 5.

§. 18. Poſita $SA = a$, $SB = x$ ut in Problemate generali §. 10. erit SBEM ( $S\text{-}fdx$ ) $= S\text{-}dx = x$ ( ſumpto nimirum f ſeu BE pro unitate) adeoque $SADM = a$. Itaque æquatio generalis ad ſcalam velocitatum AF (§. 10.) $uu = Q - S.\, fdx$ evadit $uu = a - x$, quæ eſt ad parabolam vertice A, axe AS deſcriptam, quadratumque velocitatis BF in quolibet puncto B erit proportionale ſpatio percurſo AB ($a - x$.)

§. 19. Scala temporum elementarium GL (§. 10) reciproca ſcalæ velocitatum erit $BG^2$ ( $zz$ ) $= \frac{1}{a-x}$, quæ eſt æquatio ad hyperbolam cubicam inter aſymptotos AL, AB, cujus ordinatæ BG ſunt in reciproca ſubduplicata ratione abſciſſarum AB. Atque adeo tempus integrum ab initio motus per ſpatium AB (§. 10.) hoc eſt BH (f) $= S. \frac{-dx}{\sqrt{a-x}} = 2\sqrt{a-x}$, ſeu, $tt = a - x$ (hic, & in ſequentibus plerumque accipio pro veris quantitatibus earum proportionales, nihil enim refert), eadem videlicet parabola, quæ erat ſcala velocitatum.

§. 20. Idem reperietur in vi centrifuga, hoc eſt

eſt ſi corpus ex quiete in puncto dato A repellatur a centro virium S vi centrifuga ſemper eadem in quacumque a centro diſtantia: ſcilicet reperietur (§. 11.) $bf^2$ (uu) = Ab (x—a). & tt=x—a, tempus videlicet per Ab in ſubduplicata ratione ſpatii percurſi Ab.

§. 21. Conferantur inter ſe motus duorum corporum, quæ vi quidem conſtanti, ſed non eadem moveantur: duo ſcilicet corpora ex quiete in punctis A, a moveantur per AB, ab, viribus conſtantibus, quæ inter ſe ſint ut rectæ AD, ad: Tum parametris ipſis AD, ad, axibus AB, ab, factæ parabolæ AF, af erunt ſcalæ velocitatum conſtructæ, uti in §. 14; nam quadrata velocitatum BF, bf erunt ut ſcalæ virium ABED, abed. Fig. 6.

§. 22. Pro inventione temporum fiat (§. 14.) ut velocitas BF ad velocitatem bf ita reciproce bg ad BG, & per puncta G, g deſcribantur hyperbolæ cubicæ GL, gl inter aſymptota, AL, AB, & al, ab, quæ erunt ſcalæ temporum elementarium relativæ: tempuſque per AB ad tempus per ab erit ut ſpatium LABG ad labg: hujuſmodi vero ſpatia ſunt inter ſe ut rectangula ABG, abg (quippe ſunt horum rectangulorum dupla) ſeu in ratione compoſita AB ad ab, & BG ad bg; & ſumendo earumdem quantitatum quadrata, erit quadratum temporis per AB ad quadratum temporis per ab in ratione compoſita $AB^2$ ad $ab^2$, & $BG^2$ ad $bg^2$ quæ ultima ratio eadem eſt ac $bf^2$ ad $BF^2$, ſeu rectanguli ba × ad ad rectangulum BA × AD: hujuſmodi vero rationes $AB^2$ ad $ab^2$, & ab × ad ad AB × AD componunt rationem AB × ad ad ab × AD, ſeu directam AB ad ab & reciprocam AD ad ad: quadrata ergo temporum per AB, ab ſunt directe ut ſpatia percurſa AB, ab, & reciproce ut vires AD, ad.

§. 23.

§. 23. Itaque ſi ſpatia percurſa AB, ab dicantur S, s: vires AD, ad, dicantur F, f: velocitates BF, bf ſimiliter, V, u: & tempora per AB, ab item T, t: erit VV. uu: : $S \times F$. $s \times f$ (§. 21.): atque TT. tt: : $\frac{S}{F} . \frac{s}{f}$ (§. 22.) ex quibus aliæ proportiones deducuntut ſpatiorum, aut virium, aut velocitatum, aut temporum inter ſe; videlicet T. t: : $\frac{V}{F} . \frac{u}{f}$, ſive : : $\frac{S}{V} . \frac{s}{u}$, & poſito V=u, erit S. s: : f. F: : T. t. itemque poſito T=t, erit S. s: : F. f: : V. u. Si ponatur S=s, erit VV. uu: : F. f: : tt. TT. Quæ omnia theoremata ſatis nota ſunt de motu corporum in planis inclinatis.

---

# EXEMPLUM II.

*De motu corporum rectilineo in vi centrali diſtantiæ a centro virium directe proportionali.*

## SECTIO I.

*Et primum in vi centripeta.*

Fig. 7. §. 24. DEcidat corpus ex quiete in puncto A recta ad centrum virium S, ſitque vis in puncto A ad vim in quolibet alio puncto B directe ut diſtantia SA ad diſtantiam SB; ſcala virium erit triangulum SAD, cujus vertex in ipſo centro S, ejuſque æquatio erit BE (f) =BS (x).

§. 25.

§. 25. Quare area EBS ($S.fdx$) $= S.xdx = \frac{1}{2} xx$; & poſito $SA = a$, erit area DSA $= \frac{1}{2} aa$: itaque æquatio generalis ad ſcalam velocitatum (§. 10.) $uu = Q - S.fdx$ evadit $uu = \frac{1}{2} aa - \frac{1}{2} xx$, ſive $uu = aa - xx$, quæ eſt eſt ad circulum AF centro S, radio SA deſcriptum; velocitas ergo in quolibet puncto B eſt proportionalis ordinatæ BF ad hunc circulum, ſeu $\sqrt{aa - xx}$

§. 26. Si ex puncto F ducatur tangens FN, quæ occurrat in N diametro SC ad SA perpendiculari, erit BF ſeu SM. SC: : SC. SN; quare si FB producatur, ſumaturque BG æqualis ſeu proportionalis cum SN, idemque fiat in qualibet alia ordinata bf; erit $FB \times BG = SC^2$ & $BG\ (z) = \frac{SC^2}{FB} \left( \frac{aa}{\sqrt{aa - xx}} \right)$: Curva ſcilicet HG erit (§. 10.) ſcala temporum elementarium, quippe reciproca ſcalæ velocitatum AFC.

§. 27. Tempus integrum ab initio motus per ſpatium AB erit (§. 10.) $t = S. \frac{-dx}{\sqrt{aa - xx}}$, quod eſt differentiale arcus circularis AF centro S, radio SA deſcripti: & quidem ducta ordinata gbf ad GBF infinite proxima, erit Ff. Fm: : FN. FM: : SN. SF, adeoque $Ff \times SF = Fm \times SN = Bb \times BG$: eſt autem $Ff \times SF$ duplum ſectoris

FSf,

FSf, & Bb × BG eſt areola infinite parva GBbg: ſumma ergo harum arcolarum dupla eſt ſummæ ſectorum FSf, ſcilicet area GBAL (tempus nempe per AB) proportionale ſectori ASF, ſeu arcui AF.

§. 28. Itaque in hac lege virium centripetarum diſtantiis a centro directe proportionalium ſi corpus decidat ex quiete in dato puncto A, deſcribatur centro S radio SA quadrans circuli AFC, & ex quolibet puncto B ſpatii percurſi ducatur BF ſinus rectus anguli BSF; erit primo vis centripeta in puncto B proportionalis diſtantiæ a centro, ſeu ſinvi complementi SB: ſecundo ſinus verſus AB ſpatium percurſum: tertio ſinus rectus BF proportionalis velocitati in puncto B: quarto tempus per AB proportionale arcui AF, ſeu angulo ASF.

§. 29. In eadem vi centripeta cujus ſcala virium eſt triangulum ASD, ſeu PSQ ſi duo corpora decidant ad centrum S, unum ex quiete in puncto A, alterum ex quiete in puncto P; velocitas corporis P in quolibet puncto R ad velocitatem corporis A in quolibet puncto B eſt (§. 4.) in ſubduplicata ratione arearum PQOR, ADEB, ſeu $SP^2 - SR^2$ ad $SA^2 - SB^2$, hoc eſt (deſcriptis centro S per puncta P, A circulis PX, AC) ut RT ad BF: Quadrantes ergo PX, AC erunt ſcalæ velocitatum relativæ (§. 14.) & velocitates in centro S horum corporum ex punctis P, A decidentium erunt ut SX ad SC, ſeu ut altitudines ipſæ SP. SA.

§. 30. Fiat ut velocitas SX ad velocitatem SC ita reciproce SN ad SZ, & quemadmodum §. 26. conſtructa fuit ſcala temporum elementarium HL in motu corporis cadentis ex A, ita ex puncto Z deſcribatur ſcala temporum elementarium ZYk in motu cordoris cadentis ex P; eritque [§. 14.] tempus per AB ad tempus per

PR

PR ut area ABGL ad aream PRYk, ſeu ut ſumma arearum infinite parvarum GBbg ad ſummam YRry: ſunt autem hujuſmodi areæ infinite parvæ in ratione compoſita Bb ad Rr (ſeu Fm ad Tn) & BG ad RY (ſeu ex conſtructione RT ad BF) quæ duæ rationes componunt rationem $\frac{Fm}{FB}$ ad $\frac{Tn}{TR}$: at vero $\frac{Fm}{FB} = \frac{Ff}{FS}$ ob ſimilitudinem triangulorum Fmf, FBS; & ſimiliter $\frac{Tn}{TR} = \frac{Tt}{TS}$: Quare area GBbg ad aream YRry eſt ut $\frac{Ff}{FS}$ ad $\frac{Tt}{TS}$; & ſumma arearum, hoc eſt area ADGL ad aream PRYK (tempora nempe per AB, PR) ut ſumma $\frac{Ff}{FS}$ (hoc eſt $\frac{AF}{AS}$) ad ſummam $\frac{Tt}{TS}$ (hoc eſt $\frac{PT}{PS}$: Tempora ergo per quaſcumque ſpatii partes AB, PR ſunt inter ſe directe ut arcus AF, PT, & inverſe ut radii SP, SA.

§. 31. Si ex centro S ducatur recta ST, quæ ſecet arcus circulares in F, T; quoniam arcus ſimiles AF, PT ſunt ut radii SF, ST; erit $\frac{AF}{FS} = \frac{PT}{TS}$, & partes ſpatiorum AB, PR (quæ hoc caſu proportionales ſunt integris ſpatiis AS, PS) eodem tempore percurrentur; ex quo colligitur integros etiam deſcenſus per AS, PS eſſe iſochronos.

§. 32. Si corpus moveri incipiat in dato puncto R cum data velocitate RT ei impreſſa ex-

terno impulſu verſus centrum S, aut contraria directione verſus P; facile eſt reperire *ſublimitatem* RP, ſive punctum ſublime P, unde corpus cadendo ex quiete datam velocitatem RT in puncto R acquireret: ſcilicet poſita RT ad RS perpendiculari, circulus centro S radio ST deſcriptus punctum P, ſeu quæſitam ſublimitatem RP determinabit: motus vero per RS fieret eodem modo ac ſi ex quiete in puncto P corpus cecidiſſet. Quod ſi ſurſum per RP corpus impellatur, movebitur motu retardato iiſdem velocitatis gradibus iiſdemque temporibus ac in motu deorſum accelerato per eadem ſpatia.

§. 33. Si conferatur motus in hac lege virium centripetarum cum motu uniformiter accelerato in vi conſtanti data puta gravitatis in perpendiculo aut per planum inclinatum, proportiones velocitatum & temporum reperientur ex dictis §. 14. hoc ſcilicet modo.

Fig. 8. Quoniam in ſcala virium ASD creſcunt vires in ratione diſtantiarum a centro S, reperiri debet talis diſtantia SA ut vis AD ſit æqualis vi conſtanti datæ: erit igitur rectangulum ASCD ſcala virium in vi conſtanti data, quæ reſpondet ſcalæ ASD uti requiritur §. 14.

Corporis decidentis ex quiete in A, cujus ſcala virium ASD ſit ſcala velocitatum [§. 25.] quadrans circuli AFC, & ſcala temporum elementarium (§. 26.) curva HGL. & quoniam ſcala virium ASCD dupla eſt ſcalæ virium ASD, erit (§. 4.) quadratum velocitatis SX corporis cadentis vi conſtanti AD ex quiete in A duplum quadrati velocitatis SC, erit nimirum $SX^2 = 2SC^2 = 2SA^2 = SA \times 2SA$; itaque parabola ATX deſcripta vertice A, axe AS, parametro duplo ipſius AS, ſeu æquali diametro circuli AC erit (§. 18.) ſcala velocitatum in vi conſtanti, quæ reſpondebit ſcalæ velocitatum ACF uti requiri-

tur

tur §. 14. , & velocitates corporum cadentium ex quiete in A (alterum vi conſtanti AD, alterum vi decreſcente in ratione diſtantiarum a centro S) in quolibet puncto B erunt ut BT ſeu ut chorda circuli AF ad ordinatam ejuſdem circuli BF.

§. 34. Ut eſt SX ad SC ita fiat (§. 14.) SH ad quartam SZ, eritque $SZ^2 = \frac{1}{2} SH^2 = \frac{1}{2} SA^2$: tum inter aſymptota AS, AL deſcripta per punctum Z hyperbola cubica ZYL reciproca parabolæ ATX erit (§. 19.) ſcala temporum elementarium in motu uniformiter accelerato reſpondens ſcalæ HGL uti requiritur §. 14. Itaque tempus deſcenſus in vi conſtanti per quamlibet ſpatii partem AB ad tempus deſcenſus in vi proportionali diſtantiis a centro per quam libet ſpatii partem Ab erit ut ABYL ad aream AbgL: eſt autem area ABYL dupla rectanguli ABY, & area AbgL dupla (§. 27.) ſectoris ASf, ſeu æqualis rectangulo SA in arcum Af: ratio ergo illorum temporum eſt ut $\frac{2AB \times BY}{SA}$ ad arcum Af: eſt vero $\frac{2AB \times BY^2}{SA} = (2SZ^2 = SH^2 = SH \times SC = SZ \times SX =) BY \times BT$, atque adeo $\frac{2AB \times BY}{SA} = BT = AF$: Illa ergo tempora per AB, Ab ſunt inter ſe ut ordinata ad parabolam BT, ſeu ut chorda circuli AF ad arcum circuli Af. & ſi puncta B, b coincidant, tempora illa per eamdem ſpatii partem AB erunt ut chorda AF ad ſuum arcum AF.

Si $Ab = \frac{1}{2} AS$, erit chorda $Af = AS$; adeoque poſito quod duo corpora incipiant moveri eadem vi AD ex quiete, tempus deſcenſus permanente eadem vi conſtanti per dimidiam a centro diſtantiam AS, erit ad tempus per integram diſtantiam AS in vi decreſcente in ratione diſtantiarum ut radius SA ad quadrantem peripheriæ AFC, ſeu ut diameter ad ſemiperipheriam.

## SCHOLION.

§. 35. QUÆ in hac prima ſectione demonſtravimus theoremata ſatis nota ſunt de motu corporum deſcendentium per cycloidem, ſed diſtintius & generalius a nobis demonſtrata, quod indicaſſe ſufficiat.

Fig. 9. 10. 11.

## SECTIO II.

*De motu corporum rectilineo in vi centrifuga diſtantiæ a centro virium directe proportionali.*

## LEMMA.

§. 36. SIT curva quælibet AF, datumque punctum S ſive intra, ſive extra curvam ſive in ejus perimetro, in quo duæ rectæ quæcumque SA, SN ſe invicem ſecent ad angulos rectos, quarum altera SA ſit veluti axis cui ex omnibus curvæ punctis ordinentur normales FB, fb; tangentes vero in iiſdem punctis FN, fn abſcindant ex alia recta SN partes SN, Sn, quibus ad eumdem axem SA, eaſdemque abſciſſas SB, Sb ordinentur æquales BG, bg; ex quo nova oriatur curva Gg. Dico ſpatium

GBbg

GBbg hujus curvæ duabus quibuſcumque ordinatis BG, bg; axe Bb, & curva ipſa Gg comprehenſum duplum eſſe correſpondentis trilinei FSf priori curva Ff & radiis SF, Sf ex dato puncto S ductis comprehenſi.

Nam ducta ad FBG infinite proxima YXZ, & FR ad BX parallela, atque ex puncto S ſuper tangente FN perpendiculari SP. Quoniam YR, SN ſunt parallelæ, erunt anguli RYF, SNP æquales, atque adeo ſimilia triangula rectangula RYF, SNP: quare YF. FR (ſive BX) : : SN (ſive BG). SP. & productam mediorum BG x BX (hoc eſt area infinite parva GBXZ) æquale producto extremorum FY x SP, ſeu duplum trianguli æquealti FSY: Summa ergo arearum GBXZ, hoc eſt area GBbg dupla eſt ſummæ triangulorum FSY hoc eſt trilinei FSf. Q. E. D.

Curva de qua egimus ſ. 26. & 27. eſt caſus particularis hujus lemmatis, cujus fortaſſis in ſequentibus frequens erit uſus, ideo placuit brevitatis gratia ſemel hic & generalius apponere. Sed ad rem redeamus. Fig. 12.

ſ. 37. Celeritates & tempora eodem plane modo reperientur in vi centrifuga quo ſectione prima reperta ſunt in vi centripeta. Corpus ex quiete in punito A repellatur a centro virium S per rectam AB, ſitque ſcala virium idem triangulum ASD cujus æquatio BE (f) = BS. (x).

ſ. 38. Quadratum velocitatis in B (uu) erit proportionale areæ ABED ſeu BSE—ASD, hoc eſt xx—aa (poſitis iiſdem denominationibus SA = a, SB = x) quare æquatio ad ſcalam velocitatum AF (ſ. 11) erit uu = xx—aa quæ eſt ad hyperbolam æquilateram centro S, ſemiaxe SA deſcriptam.

ſ. 39. Si ex puncto F ducatur tangens FN,

quæ occurrat in N ſemiaxi tranſverſo CS producto, erit ex conicis BF, ſeu SM . SC :: SC . SN; quare ſi FB producatur, ſumaturque BG æqualis ſeu proportionalis cum SN, idemque fiat in ceteris ordinatis, emerget GL ſcala temporum elementarium (ſ. 11.), quippe reciproca ſcalæ velocitatum AF, ſiquidem BG × BF ($z \times \sqrt{xx - aa} = SC^2$, ſive $SA^2$ (aa) & $z =$

$$\frac{aa}{\sqrt{xx - aa}}.$$

ſ. 40. Tempus integrum ab initio motus per ſpatium AB erit (ſ. 11) $t = S. \frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}$, quod differentiale eſt duplum differentialis trilinei hyperbolici comprehenſi arcu AF, ſemiaxe SA, & radio SF ducto ab ejus centro, ut ex lemmate præcedenti ſ. 36. patet, & tota area GBAL ($= S. \left(\frac{aadx}{\sqrt{xx - aa}}\right)$ dupla eſt trilinei hyperbolici ASF, cui proinde proportionale eſt tempus per AB.

ſ. 41. Si eadem vi centrifuga duo corpora repellantur a centro S, unum ex quiete in A, aliud ex quiete in P, velocitas corporis P in quolibet puncto R ad velocitatem corporis A in quolibet puncto B eſt (ſ. 4.) in ſubduplicata ratione arearum PQOR ad ADEB, ſeu $SR^2 - SP^2$ ad $SB^2 - SA^2$, hoc eſt (deſcriptis centro S hyperbolis aequilateris PT, AF, quarum ſemiaxes SP, SA) ut RT ad BF. hyperbolæ ergo PT, AF erunt ſcalæ velocitatum relativæ (ſ. 14); & in quolibet puncto B velocitates corporum venientium ex quiete in punctis A, P erunt inter ſe ut ordinatæ BF, BV ad dictas hyperbolas.

§. 42. Quemadmodum §. 39. ope tangentium FN conſtructa eſt ſcala temporum elementarium GL reciproca ſcalæ velocitatum AF, ita ut rectangulum quarumcumque ordinatarum GB×BF ſit æquale quadrato ſemiaxis SC ſive SA; ita ſimiliter ope tangentium hyperbolæ PT conſtruatur ſcala temporum elementarium XH reciproca ſcalæ velocitatum PT, ut ſcilicet rectangulum quarumcumque ordinatarum XB×BV æquetur quadrato ſemiaxis SP; eritque per lemma præcedens (§. 26.) area ALGB dupla trilinei hyperbolici SAF; & area PHXB dupla trilinei hyporbolici SPV: Verum hujuſmodi ſcalæ temporum elementarium non ita inter ſe reſpondent uti §. 14. requiritur, non enim eſt GB ad BX ut reciproce BV ad BF; nam ex conſtructione GB×BF æquatur $SA^2$, & XB×BV æquatur $SP^2$. Itaque fiat ut $SP^2$ ad $SA^2$ ita BX ad BZ, ſive ita VB×BX ad VB×BZ, eritque VB×BZ $=SA^2=$FB×BG: Si modo per punctum Z deſcribatur curva ZIK ſimilis curvæ XYH, ita nimirum ut quælibet ordinatæ RY, RI ſint inter ſe ut BX, BZ; atque adeo tota area PHXB ad aream PKZB ut BX ad BZ, ſive ut $SP^2$ ad $SA^2$; erunt areæ ALGB, PKZB ſcalæ temporum elementarium relativæ (§. 14.) in motu corporum ex quiete in punctis A, P, & tempora horum motuum per quaslibet ſpatii partes AB, PR erunt inter ſe ut areæ ALGB, PKIR, hoc eſt in ratione compoſita areæ ALGB ad aream PHYR (ſeu trilinei hyperbolici SAF ad trilineum SPT) & areæ PHYR ad aream PKIR (ſeu $SP^2$ ad $SA^2$): tempus ergo per AB corporis venientis ex A ad tempus per PR corporis venientis ex P eſt ut $\frac{SAF}{SA^2}$ ad $\frac{SPT}{SP^2}$, nimirum tempora illa ſunt directe ut trilinei

hyperbolici ASF, PST, & inverſe ut ſemiaxium SP, SA quadrata.

Parum diverſe hic temporum proportio reperta eſt ac §. 32. in vi centripeta, ſed hoc idem ratiocinium ibi adhibere potuiſſemus; at expeditior & ſimplicior res erat in circulo quam in hyperbola.

§. 43. Si ex centro S ducatur recta quælibet ST, quæ ſecet hyperbolas in punctis, T, F; ex quibus ducantur ordinatæ TR; FB; & ex punctis P, T, A, F ad communem aſymptotum SE ordinatæ Pp, Tt, Aa, Ff, quæ duæ poſtremæ ſecent in m, n hyperbolam PT. Erit primo $SB^2 . SR^2$ (:: $BF^2$ $RT^2$):: $BS^2 - SA^2$ $RS^2 - SP^2$: ideoque permutando & dividendo $SB^2 . SA^2 :: SR^2 . SP^2$; & SP. SA:: SR. SB:: ST. SF. Erit ſecundo Sp. Sa (:: SP. SA :: ST. SF):: St. Sf; atque adeo quoniam in aſymptoto ratio abſciſſarum Sp ad St eadem eſt ac ratio abſciſſarum Sa ad Sf, erunt ſpatia hyperbolica PptT, mafn inter ſe æqualia. Erit tertio trilineum hyperbolicum PST æquale quadrilineo hyperbolico PptT, ut patet ex æqualibus triangulis SPp, STt detracto communi triangulo Srp, additoqne communi trilineo PrT: itemque trilineum ASF æquale eſt quadrilineo AafF. Quibus poſitis erit trilineum ASF ad PST ut quadrilineum AafF ad PptT ſive ad huic æquale quadrilineum mafn: eſt vero quadrilineum AafF ad mafn ut Aa ad ma (in eadem enim ratione ſunt ſingulæ correſpondentes ordinatæ ad utramque hyperbolam) ſive ut $Aa \times aS$ ad $ma \times aS$ ſeu ad $Pp \times pS$, hoc eſt ut $SA^2$ ad $SP^2$. Igitur trilineum ASF eſt ad trilineum PST ut $SA^2$ ad $SP^2$, &

$$\frac{ASF}{SA^2} = \frac{PST}{SP^2}$$; hoc eſt (§. 42.) tempo-

ra

ra per AB , PR æqualia . Si ergo ex quiete in punctis P, A moveantur corpora, ſpatia quælibet PR, AB , quæ ſint inter ſe ut diſtantiæ a centro SP, SA , eodem tempore percurrentur; quod idem demonſtratum eſt §. 31. in vi centripeta.

§. 44. Si corpus ponatur in quiete in centro S, ſi nempe SA (a) $=$ o, erit uu $=$ (§. 38.) $xx - aa = xx$; & $z = \frac{1}{x}$; atque $dt = zdx = \frac{dx}{x}$, cujus integrale eſſe poteſt vel quantitatis infinitæ ( nam $S. \frac{dx}{x} = S. x^{-1} dx = \frac{x^{0}}{0} = \frac{1}{0} = \infty$ ) vel logarithmus ipſius x ſi nempe addatur vel detrahatur quantitas aliqua conſtans . quæ quidem clarius explicanda ſunt.

Si itaque corpus ex quiete in centro S moveatur per SAB , quadrata velocitatum uu in punctis A, B erunt ut trianguli ASD, BSE , ſive ut quadrata $SA^2$ , $SB^2$ ( xx ): ſcala ergo velocitatum eſt eadem ac ſcala virium nimirum triangulum BSE : ejuſque trianguli curva reciproca, quæ eſt hyperbola inter aſymptota GHL, erit ſcala temporum elementarium , hoc eſt BG (z) $= \frac{1}{BS} \left( \frac{1}{x} \right)$. Tempus ergo ab initio motus in centro S per ſpatium quodcumque SA erit ut area aſimptotica SLHA , quæ eſt infinita . At vero tametſi corpus in centro S poſitum nonniſi tempore infinito ſpatium quodlibet SA percurreret , tamen in dato quolibet Fig. 13.

pun-

puncto A ea celeritate impelli poteſt, quam eo motu acquireret, celeritate nimirum AD; in quo caſu motus per AB continuatas easdem ſcalas celeritatum & temporum elementarium habebit: tempora ergo ab initio hujus motus in dato puncto A per ſpatia quælibet AC, AB erunt (§. 8.) ut areæ hyperbolicæ AHFC, AHGC. Notum vero eſt has areas hyperbolicas eſſe logarithmos abſciſſarum SC, SB (x), ita nimirum ut, ſumpta abſciſſa SA pro unitate, ſint hinc inde abſciſſæ ſuperiores SC, SB &c. termini aſcendentes progreſſionis geometricæ, & abſciſſæ inferiores Sc, Sb &c. termini deſcendentes, quemadmodum areæ hyperbolicæ ſuperiores AHFC, AHGB &c. ſunt termini poſitivi progreſſionis arithmeticæ, & areæ inferiores AHfc, AHgb &c. ſunt ejusdem progreſſionis termini negativi hinc inde ab ordinata AH ubi area eſt nulla.

Si ergo ad eaſdem abſciſſas SC, SB fiant ordinatæ CM, BN proportionales areis AHFC, AHGB, erit curva NAn logarithmica, & quælibet ordinata BN erit logarithmus abſciſſæ SB, ſcilicet BN = l. x. Itaque tempus quo corpus deſcribit ſpatium AB (ſeu dicas differentia temporum quibus deſcribuntur ſpatia a centro SA, SB) eſt ut BN logarithmus diſtantiæ a centro SB. Similiter tempus quo deſcribitur Ab, ſeu differentia temporum quibus deſcribuntur SA, Sb, eſt ut bn logarithmus diſtantiæ Sb. Si ergo in dato puncto A impellatur corpus ſurſum vel deorſum velocitate AD, ſcala temporum motus accelerati ſurſum per AB, vel retardati deorſum per AS erit logiſtica NAn.

Fig. 12. §. 45. Si motus in eadem vi centrifuga incipiat a centro S cum aliqua velocitate SC, quam exempli cauſsa acquireret corpus eadem vi centripeta ad centrum decidens per altitu-

dinem

dinem aS , & ex centro S inde repellatur vi centrifuga per SA , erit $uu = aa + xx$ , & $zz = \frac{1}{aa+xx}$ , & $dt = \frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}$ , quod eſt differentiale ejuſdem ac ſupra trilinei hyperbolici comprehenſi ab hyperbola Cb , ſemiaxe tranſverſo SC , & radio ducto ab ejus centro , ſumptis in axe conjugato SA abſciſſis $= x$ , quod innuiſſe ſufficiat ne eadem repetere videamur.

§. 46. Quæ dicta ſunt §. 32. in vi centripeta ſi corpori celeritas aliqua externo impulſu imprimatur , applicari etiam poſſunt in vi centrifuga : reperiri nimirum punctum A, a quo corpus moveri debeat ex quiete ut in dato puncto B datam velocitatem BF acquirat: ſiquidem centro S per datum punctum B deſcripto circulo Bd, quem ſecet in d recta ex F parallela ad SB , ſi ex d ducatur ſuper SB perpendicularis dA , habebitur punctum quæſitum A vertex hyperbolæ ſeu ſcalæ velocitatum AF; quod ex dictis clarum eſt . Si data celeritas BF æquetur SB punctum A coincidet cum S , & erit caſus §. 44. , atque hyperbola AF coincidet cum aſymptoto SE. Si demum celeritas BF ſit major quam SB erit caſus §. 45., & tum centro B diſtantia BF deſcribi debet circulus qui ſecabit SM in puncto C vertice hyperbolæ ſeu ſcalæ velocitatum Cb: quæ ex dictis clara ſunt.

## SCHOLION.

§. 47. NE prorſus vana & a naturalium rerum uſu longe aliena hæc virium centrifugarum contemplatio exiſtimetur , placet exempli loco Problema phyſicum proponere , quod ex dictis facile ſolvetur.

Scit

Sit vas ACMN hydrargyro, vel aqua, aut alio liquore homogeneo ( qui compreſſionem non patiatur ) plenus, & in ejus fundo ſit particula ſeu bulla aeris A liquore ipſo levior ut ſurſum attolli debeat: quæritur ejus aſcenſus vis, & celeritas in quolibet puncto B., item tempus per quamlibet ſpatii partem AB.

Fig. 14.

Experimentis conſtat ( ut videre eſt apud Mariotte, Hiſt. Accad. Paris. an. 1703. Tranſ. Philoſ. Londin. 1671. David: Gregory Aſtr. Ph. lib. v. prop. 3. & alibi ) denſitates aeris datæ quantitatis compreſſi ponderibus comprimentibus eſſe proportionales: Cumque gravitates ſpecificæ ſint denſitatibus proportionales; erunt gravitates ſpecificæ ejuſdem quantitatis aeris iiſdem ponderibus comprimentibus proportionales: quare gravitas ſpecifica bullæ aeris in fundo A ad ejuſdem aeris gravitatem ſpecificam in loco B erit ut pondus liquoris NACM ad pondus liquoris NBRM, hoc eſt ( ob liquidi naturam ) ut altitudo AN ad altitudinem BN. Hoc poſito ſit gravitas ſpecifica liquoris vaſe contenti ad gravitatem ſpecificam bullæ aeris in fundo A ut CA ad CD, jungaturque MD: erit ex dictis gravitas ſpecifica aeris in fundo A ad gravitatem ſpecificam ejuſdem aeris in quolibet alio loco B ut CM ad RM, ſive ut CD ad RE: quare gravitas ſpecifica liquoris ad gravitatem ſpecificam aeris in quolibet loco B erit ut RB ad BE; & differentia harum gravitatum, ſive ( ex Archimede Prop. VI. de inſid. hum.) vis qua aer B ſurſum impellitur erit ſemper proportionalis rectæ BE in trapezio NADM ordinatæ, ſeu diſtantiæ BS a puncto S ubi productæ NA, MD conveniunt. Aer igitur ex fundo vaſis A movebitur vi centrifuga tendente ad centrum S diſtantiis ab ipſo centro directe proportionali.

Hinc

Hinc deſcripta centro S, vertice A, axe AN, hyperbola AF, erit celeritas in quolibet puncto B ut ordinata BF, & tempus per quamlibet ſpatii partem AB ut trilineum hyperbolicum ASF.

# EXEMPLUM III.

*De motu corporum rectilineo in vi centrali quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali.*

## SECTIO I.

*Et primum in vi centripeta.*

§. 48. DEcidat corpus ex quiete in puncto A recta ad centrum virium S; ſitque Fig. 15.
vis AD in puncto A ad vim BE in quolibet alio puncto B reciproce ut $SB^2$ ad $SA^2$: ſcala virium DE erit hyperbola cubica inter aſymptota SA, SC, ejuſque æquatio erit $BE(f) = \frac{1}{BS^2}\left(\frac{1}{xx}\right)$.

§. 49. Quare area EBSC ($S. fdx$) $= S. \frac{dx}{xx}$ A: $-\frac{1}{x}$, & poſito $x = SA = a$, erit area DASC $= -\frac{1}{a}$ itaque æquatio generalis ad ſcalam velocitatum AF (§. 10.) $uu = Q - S. fdx$ evadit $uu = -\frac{1}{a} + \frac{1}{x}$, ſive $uu = \frac{a-x}{ax}$, ſcilicet quadratum velocitatis $BF^2$ ($uu$) eſt proportionale quantitati

hoc

$\frac{a-x}{x}$, hoc eſt directe ut ſpatium percurſum AB (a—x), & reciproce ut ſpatium percurrendum BS (x).

Et quidem quadrata velocitatum BF, bf in quibuslibet punctis B, b ſunt (§. 4.) ut areæ hyperbolicæ ABED, AbeD: area vero ABED eſt differentia arearum BME, AMD, ſeu (in hac hyperbola cubica) rectangulorum EBS, DAS: ſi ergo inter aſymptota SA, SC ducatur per punctum D hyperbola apolloniana DR, quæ ſecet in R ordinatam BE, erunt rectangula DAS, RBS æqualia, adeoque EBS — DAS = EBS — RBS = ER x BS = (ob EB. BR :: BR. AD :: AS. SB, & dividendo ER. RB :: AB. BS) RB x BA: ſpatium ergo hyperbolicum DABE æquatur rectangulo ABR: ſimiliterque demonſtratur ſpatium DAbe æquale rectangulo Abr. Sunt autem rectangula ABR, Abr in ratione compoſita ex AB ad Ab, & ex BR ad br, ſive Sb ad SB: quare ſpatia illa hyperbolica, ſeu quadrata velocitatum in punctis B, b, ſunt directe ut ſpatia percurſa AB, Ab, & reciproce ut diſtantiæ a centro Sb, SB.

Scala ergo velocitatum AF erit curva ejus naturæ, ut ordinatarum BF, bf quadrata ſint ut abſciſſæ a vertice A applicatæ ad abſciſſas a centro virium S, hoc eſt ut $\frac{AB}{BS}$ ad $\frac{Ab}{bS}$: quæ curva conſtrui poteſt ope ſemicirculi vel ſemiellipſeos AHS ſuper diametro AS. nam ducta in vertice A tangente AG infinite producta, ex puncto S ducantur SG, Sg ſecantes circulum ſeu ellipſim in H, h, ex quibus punctis ordinatæ BH, bh producantur in F, f, ut ſint BF = AG, bf = Ag &c. eaque curva AF erit ver-

ſoria,

ſoria, de qua vide epiſt. noſtram ad cl. Lorentinium num. 27.

§. 50. Poteſt eadem verſoria conſtrui ope tangentium. Scilicet ex quolibet puncto h circuli vel ellipſis ducatur tangens hX, quæ a tangente in vertice A abſcindat AX; erit hæc AX dimidia ſupradictæ Ag (ut patet ex conicis) ſeu bf ordinatæ ad verſoriam. Ex qua conſtructione patet, aream quamcumque FBbf ordinatis FB, fb, axe Bb, & arcu verſoriæ Ff comprehenſam quadruplam eſſe trilinei elliptici ſeu circularis HAh ramis AH, Ah, & arcu Hh comprehenſi; quemadmodum verſoriæ ſpatium integrum NAS quadruplum ſemiellipſeos aut ſemicirculi: eſt enim hic caſus particularis lemmatis §. 36. fig. 11. Si nimirum ipſi AX ponatur æqualis ordinata bn, idemque fiat de aliis ordinatis, orietur curva verſoria AnHN, cujus quælibet ordinatæ BH, bn dimidiæ ſunt ordinatarum BF, bf ad aliam verſoriam AfF. hæcque verſoria AnHN tranſit per punctum H medium ſemicirculi AHS.

§. 51. Quod ſi corpora duo decidant ex variis a centro diſtantiis alterum videlicet ex quiete in puncto A, alterum ex quiete in puncto a, per quaslibet ſpatii partes AB, ab; quæraturque ratio velocitatum in punctis B, b. In ſcala virium ducendæ ſunt ordinatæ AD, BE, ad, be, & per puncta D, d, hyperbolæ apollonianæ in §. præced. DR, dr. erunt quadrata velocitatum in punctis B, b, ut areæ hyperbolicæ DABE, dabe, ſeu (§. 49.) ut rectanguli AB × BR, ab × br; ſcilicet in ratione compoſita AB. ab, & BR. br; quarum rationum ultima BR. br componitur ex rationibus BR. AD (ſeu SA. SB), AD. ad (ſeu $Sa^2$. $SA^2$), & ad. br (ſeu Sb. Sa), quæ tres rationes componunt ratio- Fig. 16.

num

num rectanguli $Sa \times Sb$ ad rectangulum $SA \times SB$. Quare quadrata illa velocitatum in punctis B, b ſunt compoſite ut AB ad ab, & $Sa \times Sb$ ad $SG \times SB$, ſcilicet ut $\frac{AB}{SA \times SB}$ ad $\frac{ab}{Sa \times Sb}$, quemadmodum analytice §. 49. repertum eſt, ſive dicas directe ut $\frac{AB}{BS}$ ad $\frac{ab}{bS}$, ſpatia nimirum percurſa applicata ad ſpatia percurrenda, & reciproce ut diſtantiæ centri ab initio motus Sa, SA.

Scalæ ergo velocitatum, quæ ſe invicem reſpondent (§. 14.) in hiſce motibus ſunt verſoriæ AF, af, in quibus quadrata ordinatarum BF, bf ſint ut $\frac{AB}{BS \times AS}$ ad $\frac{ab}{bS \times aS}$: hujuſmodi vero verſoriæ conſtruuntur ope ellipſium AHS, ahS, quarum axes majores AS, aS ſint reciproce ut quadrata minorum axium: nam ſi puncta B, b, ſint centra ellipſium erit $\frac{AB}{BS} = \frac{ab}{bS}$; quare in hoc caſu erit $BF^2 . bf^2 :: \frac{1}{AS} . \frac{1}{aS}$: Sunt autem BF, bf (ut conſtat ex conſtructione verſoriæ §. 49.) dupla ſemiaxium minorum HB, hb, hoc eſt axibus minoribus æquales: quare &c.

§. 52. Coroll. 1. Si diſtantiæ a centro AS, aS proportionaliter dividantur in B, b, ut nempe ſit $\frac{AB}{BS} = \frac{ab}{bS}$, quadrata velocitatum in punctis

ctis illis B, b erunt inter ſe in ratione conſtanti, nempe reciproca diſtantiarum AS, aS.

§. 53. Cor. 2. Si diſtantiæ a centro AS, aS ita dividantur in B, b, ut ratio AB ad BS ſit ad rationem ab ad bS, ſive dicas ſit $\frac{AB}{BS}$ ad $\frac{ab}{bS}$ directe ut diſtantiæ ipſæ SA ad Sa, velocitates in punctis B, b erunt æquales.

§. 54. Porro cum ſcala velocitatum ſit (§. 49.) $uu = \frac{a-x}{ax}$, ejus reciproca erit ſcala temporum elementarium [§. 10.] $zz = \frac{ax}{a-x}$, eadem nimirum verſoria ſitu inverſo deſcripta ſcilicet vertice in puncto S. Fig. 15.

Scala vero temporum integrorum [§. 10.] erit $t = S.\sqrt{\frac{ax}{a-x}}dx$, ſeu $dt = dx \sqrt{\frac{ax}{a-x}}$: quare $dt. dx$ (hoc eſt ordinata ad ſubtangentem) :: $\sqrt{x}. \sqrt{a-x}$, in ſubduplicata videlicet ratione SB. BA, quæ eſt proprietas cycloidis, cujus vertex A, axis ſeu diameter circuli genitoris AS. Conſtans quantitas $\sqrt{a}$ in hoc calculo curvam non mutat. Hæc vero clarius diſtinguenda ac demonſtranda ſunt.

§. 55. Decidat corpus ex quiete in puncto A, ſitque ſcala velocitatum verſoria AFN circulo Fig. ſeu ellipſi AHS genita, ordinatiſque FB, fb, 17. erit $FB^2. fb^2 :: \frac{AB}{BS}. \frac{Ab}{bS}$. Itaque in ſcala tem-

porum elementarium SGM ( quæ eſt reciproca ſcalæ velocitatum ) erit $BG^2 . bg^2 :: \frac{SB}{BA} . \frac{Sb}{bA}$, eadem nempe verſoria, cujus vertex S, aſymptotum AM.

Tempora ergo per Ab, AB ſunt inter ſe ut areæ hujus verſoriæ MAbg, MABG, ſeu ut areæ circulares aut ellipticæ ASp, ASP; illæ enim areæ ſunt harum arearum quadruplæ uti ex ſ. 50. colligitur.

Quod ſi curva APS ſit circulus ( licet enim vel circulum eam ponere vel ellipſim ut di-
Fig. 18. ctum eſt ) area ASP æquatur ſectori ACP una cum triangulo CPS: at vero ſector ACP æquatur arcui AP ducto in ſemiſſem radii CS; & triangulus CPS æquatur ordinatæ PB ductæ in ſemiſſem radii CS: Ergo area circularis ASP æquatur arcui AP & ordinatæ PB ſimul ſumptis ductis in ſemiradium: ſimiliter demonſtrabitur area ASp æqualis arcui Ap cum ordinata pb ductis in ſemiradium. Tempora ergo deſcenſus per AB, Ab erunt inter ſe ut AP+PB ad Ap+pb, ſeu ut BT ad bt ordinatæ ad cycloidem vertice A circulo APS deſcriptam.

ſ. 56. Si corpora duo decidant ex variis di-
Fig. 19. ſtantiis a centro, puta ex quiete in punctis A, a, quæraturque ratio temporum deſcenſus per quaslibet ſpatii partes AB, ab. Quoniam ſcalæ temporum in his motibus ſunt verſoriæ AF, af ( ſ. 51. ) quarum ellipſes genitrices AHS, ahS habent axes AS, aS reciproce ut quadrata axium conjugatorum bf, BF; proinde harum verſoriarum curvæ reciprocæ, hoc eſt ( §. 14. ) ſcalæ temporum elementarium, eſſe debent verſoriæ SG, Sg genitæ ex ellipſibus SPA, Spa, in quibus axes SA, Sa ſint directe ut quadrata axium conjugatorum BG, bg, ſive ut rectangula ip-

la ipſorum axium SA, Sa in ſuas reſpectivas parametros: ergo harum ellipſium SPA, Spa æquales ſunt, atque adeo ellipſes ipſæ ad communem verticem S æquicurvæ.

Tempora ergo deſcenſus corporum per ſpatia AB, ab ſunt inter ſe ut areæ dictarum verſoriarum MABG, mabg, ſive ut areæ ellipticæ PSA, pSa (§. 50.).

Si altera harum ellipſium puta SPA ponatur circulus, cujus nempe parameter ſit ipſa diameter SA, erit hæc eadem SA parameter reliquæ ellipſis Spa, cujus proinde axis conjugatus eſt medius proportionalis inter Sa, SA; & axis Sa ad axem conjugatum erit in ſubduplicata ratione Sa ad SA. Deſcribatur nunc ſuper axe Sa ſemicirculus SCa, & circulis SPA, SCa deſcribantur cycloides ATR, atr: erit ex demonſtratis in deſcenſu corporum ex punctis A, a, tempus per AB ad tempus per ab ut area circularis ASP ad ellipticam aSp, hoc eſt in ratione compoſita areæ ASP ad aream circularem aSC, & hujus areæ aSC ad ellipticam aSp, at vero prima harum rationum ASP ad aSC eſt, Fig. 20.

eadem (§. 55.) quæ $BT \times \frac{1}{4} SA$ ad $bt \times \frac{1}{4} Sa$,

ſeu $BT \times SA$ ad $bt \times Sa$. Secunda vero illarum rationum, areæ ſcilicet aSC ad aSp eſt [ex conicis] eadem quæ ordinatæ bC ad ordinatam bp, ſeu axis Sa ad axem conjugatum ellipſis, ſive (ex ſupradictis) in ſubduplicata ratione Sa ad SA: quæ duæ rationes $BT \times SA$ ad $bt \times Sa$,

& $\sqrt{Sa}$ ad $\sqrt{SA}$ componunt rationem $BT \times$

$\sqrt{SA}$ ad $bt \times \sqrt{Sa}$: in hac ergo ratione ſunt tempora deſcenſus per AB, ab, ſcilicet in ratione compoſita ordinatarum ad cycloides BT,

bt, & ſubduplicata diſtantiarum ab initio motus SA, Sa, uti analytice repertum eſt §. 54.

§. 57. Coroll. Tempora igitur deſcenſus ex quiete in punctis A, a per integra ſpatia AS, aS ad centrum uſque, ſunt compoſite ut SR ad Sr ( ſive ut SA ad Sa ) & ut $\sqrt{SA}$ ad $\sqrt{Sa}$: atque adeo quadrata temporum per AS, aS, ſunt ut cubi diſtantiarum ſeu ſpatiorum deſcriptorum AS, aS. Quod etiam demonſtrari poteſt ex coroll. §. 52. Nam ſi ſpatia AS, aS dividantur in partes infinitas proportionales integris ſpatiis AS, aS; numerus harum partium erit in utroque ſpatio æqualis: velocitates vero quibus particulæ in ſpatiis iſtis ſimiles & ſimiliter poſitæ percurruntur ſunt ſemper ( §. 52. ) in conſtanti ratione reciproca ſubduplicata ſpatiorum, ſcilicet ut $\sqrt{aS}$ ad $\sqrt{AS}$: Tempora vero quibus ſimiles illæ & ſimiliter poſitæ particulæ percurruntur ſunt ut particulæ illæ directe ( quæ proportionales ponuntur ſpatiis integris AS, aS ) & inverſe ut velocitates, hoc eſt ( ex dictis ) directe ut $\sqrt{AS}$ ad $\sqrt{aS}$; quæ duæ rationes componunt rationem $\sqrt{AS^3}$ ad $\sqrt{aS^3}$: quare in eadem ratione erunt etiam integra tempora per ſpatia integra AS, aS; ſive quadrata horum temporum ut cubi ſpatiorum deſcriptorum. Q. E. D.

§. 58. Hucuſque inveſtigavimus celeritates & tempora in caſu quod corpus incipiat moveri ex quiete in data qualibet a centro diſtantia finita: verum in hac virium centripetarum lege ſi corpus decidat ex infinita diſtantia, imo ſi in in-

in infinita diſtantia adhuc ſupponatur aliquo celeritatis gradu donatum, non ideo infinitam celeritatem acquiret, donec ad centrum uſque virium S non pertingat.

§. 59. Id conſtat ex ipſa ſcala virium centralium, quæ eſt hyperbola cubica, cujus area infinite longa AMD (proportionalis quadrato velocitatis in puncto A corporis cadentis ex infinita diſtantia) eſt quantitatis finitæ, æqualis ſcilicet rectangulo SAD. Itaque ſi §. 49. in æquatione ad ſcalam velocitatum $uu = \frac{a - x}{ax}$ ponatur quantitas a (SA) infinita, hoc eſt punctum A, unde motus incipit ex quiete, infinite remotum, æquatio illa evadet $uu = \frac{1}{x}$, ſcilicet hyperbola cubica. Hujus reciproca $zz = x$ erit parabola ſcala temporum elementarium. Et ſcala temporum integrorum (§. 10.) per ſpatia percurrenda uſque ad centrum, $t = S. - x^{\frac{1}{2}} dx = - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}$, quæ eſt ex genere parabolarum. Fig. 15.

§. 60. Quod ſi corpus ab infinita diſtantia deſcendere incipiat non quidem ex quiete, ſed ea adhuc ibi celeritate donatum, quam acquireret cadendo ex infinita diſtantia uſque ad punctum datum A (poſita diſtantia SA = a). In hoc inquam caſu quadratum velocitatis in puncto B erit proportionale ſummæ arearum (§. 4.) AMD, BME, ſcilicet $uu = \frac{1}{a} + \frac{1}{x}$

$\frac{1}{x} = \frac{a+x}{ax}$, quæ eſt æquatio ad verſoriam hyperbolicam, de qua vide epiſtolam noſtram ad Cl: Lorentinium num. 27. Hujus vero curvæ reciproca $zz = \frac{ax}{a+x}$ erit ſcala temporum elementarium. Æquatio vero temporum integrorum erit $dt = dx\sqrt{\frac{ax}{a+x}}$, quod eſt in data proportione ad differentiale bilinei hyperbolici arcu hyperbolæ & radio a vertice S ducto comprehenſi. Sed geometricam hæc explicationem demonſtrationemque requirunt.

Fig. 16. §. 61. Cum hyperbolæ cubicæ DE (quæ in hac hypotheſi eſt ſcala virium) ſpatium aſymptoticum ad partes C ſit infinitum, ideo corpus cadendo ex quiete in quolibet dato puncto A uſque ad centrum S, in hoc motu per AS omnes velocitatis gradus excurret, ita nimium ut in puncto A velocitas ſit infinite parva, in centro S infinita (§. 4.). Itaque ſi ponatur corpus moveri ex dato puncto A cum data velocitate externo impulſu ei impreſſa, poteſt ejuſmodi velocitas ſupponi ea, quam corpus acquireret libere cadendo ex ipſo puncto A per quamlibet datam ſpatii partem AB. Nunc quæramus *ſublimitatem* Aa, ſive punctum ſublime a, unde corpus libere cadendo ex quiete datam illam velocitatem in puncto A acquireret.

Ea ſublimitas facile reperietur ex dictis §. 51. Nam corporum libere cadentium ex punctis A, a, quadrata velocitatum in punctis B, A ſunt ut $\frac{AB}{BS \times AS}$ ad $\frac{Aa}{AS \times Sa}$, ſive ut $\frac{AB}{BS}$ ad

ad $\frac{Aa}{Sa}$: Si ergo velocitates iſtæ ſunt æquales debet eſſe $\frac{AB}{BS} = \frac{Aa}{Sa}$, & SB . BA :: Sa . Aa; adeoque dividendo SB—BA . BA :: SA . Aa, cujus proportionis tres priores termini noti dabunt quartum Aa, quæ eſt ſublimitas quæſita.

*§. 62.* Porro primus terminus hujus proportionis SB—BA eſſe poteſt vel poſitivus, vel nihilo æqualis, vel negativus prout SB ponitur major, vel æqualis, vel minor quam BA, ſeu (quod idem eſt) prout datus corporis lapſus AB ponitur minor, vel æqualis, vel major quam dimidia altitudo AS unde corpus decidit. In primo caſu ſublimitas Aa poſitiva ad ſuperiores partes ſumenda eſt; in ſecundo caſu ſublimitas unde corpus cadere debet eſt infinita; in tertio caſu ſumenda eſt negativa, ſcilicet ad partes contrarias inferiores veluti AP ut analogia ſervetur: in quo tertio caſu ſi inter aſymptotos SC, SP deſcribatur alia æqualis hyperbola ſeu ſcala virium, facta ut ſupra BA—BS . BA :: SA. AP. erit ſpatium hyperbolium ABED (hoc eſt quadratum velocitatis in B corporis cadentis ex A) æquale utroque ſimul ſpatio aſymptotico infinite longo PmQ+AMD (vide *§.* 51. eſt enim ſimilis demonſtratio), hoc eſt quadrato velocitatis in A corporis egredientis libere ex puncto P, & infinita ſpatia Pm, MA percurrentis, veluti ſi per infinitam Pm vi centrifuga a centro primum repelleretur, indeque per MA vi centripeta impelleretur ad centrum.

Si quis de duobus hiſce hypotheſibus ſcrupulum moveat, nihil refert: quandoquidem velocitas, qua corpus pollere ſupponetur ipſo

motus initio in dato puncto A, ſi per infinitum deſcenſum, aut vi centrifuga & centripeta ſimul modo a nobis explicato acquiri nequeat, poteſt tamen corpori in puncto A imprimi externo impulſu, aut alio quovis modo: & hæ conſtructiones aſſumendæ ſunt ut celeritates & tempora inveſtigentur. Inveſtigata vero ſunt & explicata hactenus ſatis diſtincte in prima hypotheſi ubi SB major ſit BA; ubi nimirum punctum ſublime a, non infinite diſtet a centro virium S.

Fig. 16. §. 63. At ſi corpori in puncto A ea velocitas imprimatur quam acquireret libere cadendo ex eodem puncto A per AB dimidiam altitudinis AS ut in ſecunda hypotheſi: quoniam punctum ſublime in hac hypotheſi infinite diſtat a centro S, erunt hujus corporis ex infinita diſtantia cadentis quadrata velocitatum in punctis quibuslibet A, B ut areæ aſymptoticæ AMD, BME, hoc eſt ut rectanguli DAS, EBS, ſcilicet in ratione compoſita AD ad BE (ſeu $SB^2$ ad $SA^2$), & SA ad SB, quæ componunt rationem SB ad SA.

Fig. 21. §. 64. Sunt ergo quadrata velocitatum AH, BF in punctis A, B reciproce ut diſtantiæ a centro SB, SA, & ſcala velocitatum HF eſt eadem hyperbola cubica ac ſcala virium, ſed contrarie poſita inter aſymptotos SA, SC. Hujus vero reciproca curva ſeu ſcala temporum elementarium SGE erit parabola, nam $AE^2 . BG^2 :: (BF^2 . AH^2 ::) SA . SB$. Quare tempora deſcenſus per ſpatia AS, BS ſunt ut areæ parabolicæ EAS, GBS, quæ ſunt proportionales rectangulis, EAS, GBS, ſcilicet compoſite ut AE ad BG (ſeu $\sqrt{AS}$ ad $\sqrt{BS}$), & AS ad BS, quæ componunt rationem $\sqrt{AS^3}$ ad

igi-

$\sqrt{BS^3}$ : igitur quadrata temporum per AS, BS uſque ad centrum ſunt ut cubi eorumdem ſpatiorum ſeu diſtantiarum a centro : eodem modo ac §. 57. repertum eſt ſi corpora libere ex quiete in punctis, A, B deciderent ad centrum S.

§. 65. Quod ſi quæratur ratio velocitatum & temporum duorum corporum decidentium, alterum ex infinita diſtantia, alterum vero ex dato quolibet puncto A. Quoniam corporis decidentis ex infinita diſtantia velocitas in puncto A æquatur (§. 62.) velocitati corporis decidentis ex ipſo puncto A per AB dimidiam diſtantiæ AS a centro; ideo hujuſmodi velocitates exprimendæ ſunt æqualibus rectis AH, BD (quæ ad majorem facilitatem ponantur æquales diſtantiæ AS): tum per punctum H deſcribatur inter aſymptota SA, SC hyperbola cubica HF, ſeu (§. 64.) ſcala velocitatum corporis cadentis ex infinita diſtantia: & per punctum D vertice A deſcribatur verſoria æquilatera (nam poſita eſt BD=AS) AND, quæ eſt ſcala velocitatum (§. 49.) corporis cadentis ex puncto A. Patet hujuſmodi ſcalas ita inter ſe reſpondere, ut corporis ex infinita diſtantia cadentis velocitas in quolibet puncto K ſit ad velocitatem in quolibet puncto M corporis cadentis ex A ut ordinata KL in hyperbola ad ordinatam MN in verſoria, ſcilicet (ſi mavis) in ſubduplicata ratione $\frac{1}{SK}$ ad $\frac{AM}{MS \times SA}$. Vide §. 51., cujus verſoriam hic reperies mutatam in hyperbolam cubicam.

§. 66. Scalæ vero temporum elementarium in iiſdem motibus relativæ uti exigitur §. 14., ſunt parabola (§. 64.) SE, & verſoria (§. 55.) SO,

ver-

vertice S deſcriptæ per puncta E, O, productis nimirum HA, DB, ſumptiſque AE, BO æqualibus inter ſe, ſeu (ſi verſoria placeat æquilatera) ipſis AH, BD, ſive SA. Quare tempus per quamlibet ſpatii partem MB corporis lapſi ex infinita diſtantia, ad tempus per eamdem MB corporis lapſi ex puncto A erit ut area parabolæ MRGB ad aream verſoriæ MQOB: eſt autem (§. 36.) area parabolica MRGB quadrupla trilinei parabolici RSG arcu RG & ramis SR, SG a vertice ductis comprehenſi: ſimiliterque area verſoriæ MQOB quadrupla eſt trilinei PSV ellipſis ſeu circuli genitoris: tempora ergo illa deſcenſus per MB ſunt inter ſe ut reſpondentes areæ RSG, PSV in parabola & circulo. Hujuſmodi vero circulus & parabola ſunt ad communem verticem S ejusdem curvaturæ, ſeu habent eamdem parametrum; nam ex conſtructione BO = AE; eſt autem BO ordinata verſoriæ ex centro B æqualis axi conjugato ellipſis genitricis SVA (nil enim refert an ſit circulus ut hic ad majorem facilitatem poſuimus), atque adeo $BO^2$ = rectangulo AS in parametrum ellipſis: ſimiliterque in parabola quadratum ordinatæ AE = rectangulo AS in parametrum parabolæ: ergo parametri hujuſmodi æquales ſunt. Confer dicta §. 56., cujus alteram verſoriam hic reperies mutatam in parabolam.

§. 67. In tertia ex tribus hypotheſibus §. 62.
Fig. expoſitis ſupponitur corpori in puncto A ea ve-
16. locitas impreſſa quam acquireret libere cadendo ex eodem puncto A per AB majorem quam dimidia a centro diſtantia AS; factoque AB — BS. AB:: AS. AP, ordinataque PQ ad hyperbolam Qm, erit quadratum velocitatis impreſſæ in puncto A proportionale utroque ſimul ſpatio hyperbolico PmQ, AMD, uti §. 62. explica-

catum eſt, quæ ſpatia æqualia ſunt rectangulis SPQ + SAD. Eademque ratione ubi idem corpus impulſum cum dicta velocitate in puncto A, pervenerit ad quodlibet aliud punctum B, quadratum velocitatis acquiſitæ in B erit proportionale ſummæ ſpatiorum PmQ + BME, hoc eſt ſummæ rectangulorum SPQ + SBE. Facile vero reperietur ſimili demonſtratione ac §. 49. ſummam rectangulorum SPQ + SAD ad ſummam rectangulorum SPQ + SBE eſſe ut $\frac{PA}{AS}$ ad $\frac{PB}{BS}$.

Itaque in hoc motu quadrata velocitatum AD, BF in punctis quibuslibet A, B, ſunt ut $\frac{PA}{AS}$ ad $\frac{PB}{BS}$; & ſcala velocitatum DF erit (*vide Epiſtolam noſtram ad cl: Lorentinium num. 27.*) verſoria hyperbolica genita ex hyperbola eadem conſtructione ac verſoria elliptica §. 49., 50. Nam vertice S axe tranſverſo SP facta hyperbola SHE (æquilatera ſi placet,) ductaque per verticem S recta quacumque HSG, quæ ſecet in H hyperbolam, & in G rectam PG normalem axi in puncto P, erit hæc PG æqualis ordinatæ BF ad verſoriam ſumendæ in ordinata HB producta. Nam SB, BP (: : $SB^2$ $BH^2$) : : $SP^2$. $PG^2$ = $BF^2$; ergo $BF^2 = SP^2 \times \frac{PB}{BS}$: cumque SP ſit linea conſtans, erit $BF^2$ proportionale $\frac{PB}{BS}$. Eadem erit curva DF ſi ducta tangente hyperbolæ HQ ponatur BF dupla PQ; nam

nam ex conicis eſt PG dupla PQ. Vide §. 50.

§. 68. Scala temporum elementarium STV, quæ eſſe debet reciproca ſcalæ velocitatum DF, erit alia verſoria hyperbolica genita ex eadem hyperbola SHE (§. 49., 50.) ducta ex puncto quolibet H ad aliam axis extremitatem P recta HP, quæ ſecet in R tangentem ad verticem SR; erit enim ſemper SR æqualis ordinatæ BT ſumendæ in ordinata HB producta. Eſt enim ut ſupra PB. BS (: : $PB^2$. $BH^2$) :. $PS^2$ $SR^2$ = $BT^2$. adeoque $BT^2 = PS^2 \times \frac{SB}{BP}$. Eademque erit curva STV ſi ducta tangente hyperbolam HO ſumatur BT dupla SO; cum ſit ex conicis SR dupla SO.

Quare ſpatium quodcumque BAVT ordinatis AV, BT, axe AB, & curva VT comprehenſum erit (§. 36.) quadruplum trilinei hyperbolici HSE arcu HE, & radiis SH, SE a vertice ductis comprehenſi; atque adeo tempus deſcenſus corporis per AB proportionale ipſi trilineo hyperbolico HSE.

§. 69. Si corpora duo impellantur in dato puucto A verſus centrum S varia cum velocitate, ea nempe quam acquirerent libere cadendo ex eodem puncto A alterum per AB, alterum vero per Ab, poſita utraque AB, Ab majore quam dimidia altitudo AS reperienda ſunt per conſtructionem, § 67, puncta P, p; faciendo ſcilicet AB—BS. AB : : AS. AP : itemque Ab—bS. Ab : : AS. Ap. Quibus poſitis ſi eodem vertice S, axibus vero tranſverſis SP, Sp, atque eadem perametro deſcribantur hyperbolæ SHE, She; reperietur ſimili demonſtratione ac §. 56., tempora deſcenſus illorum corporum per quamlibet ſpatii partem AB eſſe inter ſe ut in hyperbolis reſpectivis trilinei hyperbolici ESH, e Sh.

§. 70. Imo ſi plura corpora in dato puncto A impellantur verſus centrum S diverſis gradibus velocitatis, iis videlicet, quos acquirerent corpora cadendo libere ex eodem puncto A per AB minorem quam dimidia altitudo AS; vel per AB æqualem dimidiæ altitudini; vel demum per Ab majorem quam dimidia altitudo: facta conſtructione §. 61., repertiſque ſublimitatibus vel poſitivis uti AP; vel infinita, vel negativis uti Ap: ſi eodem vertice S deſcribantur ellipſis SCP, parabola SE, & hyperbola SG, facto videlicet SP ellipſis, & Sp hyperbolæ axe transverſo, parameter vero eadem ſit omnium ſectionum, ita ut ad communem verticem S ſint ejusdem curvaturæ; Hoc poſito aſſero, tempora deſcenſus horum corporum per quamlibet ſpatii partem Ab eſſe inter ſe ut reſpectivæ areæ in illis conicis ſectionibus comprehenſæ radiis a vertice S ductis, & arcubus quos ordinatæ ex punctis A, b abſcindunt, ſcilicet ut areæ CSD, ESF, GSH. Demonſtratio ex ſupradictis colligitur; quam brevitatis gratia prætermittimus: fortaſſe enim nimium hactenus prolixi fuimus; at geometrice hæc tractanda potius quam analytice exiſtimamus; & in hac celebri virium centralium hypotheſi, quæ proculdubio corporum cœleſtium motibus maxime congruit, omnia diſtinguere ac demonſtrare voluimus: eoque exemplo in qualibet alia hypotheſi leges motus minutim perveſtigari poſſunt cum opus fuerit. Quod & in ſequenti etiam exemplo præſtabimus ob elegantiam problematis, quod a doctiſſimis viris delibatum non tamen abſolutum eſt. Fig. 23.

SE-

# SECTIO II.

## *De motu Corporum rectilineo in vi centrifuga quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali.*

§. 71. IN vi centrifuga celeritates & tempora eodem modo reperientur quo ſectione prima reperta ſunt in vi centripeta. Sit centrum virium centrifugarum P, & corpus ex
Fig. 22. dato puncto S repellatur a centro per rectam SB; ſitque PS $=$ a, PB $=$ x: reperietur in puncto quolibet B quadratum velocitatis $uu = \frac{x - a}{x}$, quæ æquatio eſt ad verſoriam hyperbolicam STV: hujus vero reciproca, ſeu ſcala temporum elementarium $zz = \frac{x}{x - a}$ eſt alia verſoria hyperbolica DF. Denique tempus $t = S.dx \sqrt{\frac{x}{x - a}}$ quod eſt trilineum hyperbolicum HPS comprehenſum arcu HS, axe PS, & radio PH ducto a vertice P hyperbolæ oppoſitæ; Sive etiam arcus parabolæ vertice S, axe SB, parametro 4 SP, ſeu 4 a deſcriptæ; cui proinde trilineo hyperbolico, ſeu arcui parabolico eſt proportionale tempus motus corporis per SB. Geometricam conſtructionem, demonſtrationemque brevitatis cauſſa pretermittimus, facile enim quiſque poterit eam ex dictis colligere. Non injucundum erit animadvertere, verſoriam STV, quæ hic eſt ſcala velocitatum, repertam fuiſſe §. 68. ſcalam temporum elementarium, quemadmodum viceverſa quæ hic eſt ſcala temporum elemen-

mentarium DF erat §. 67. ſcala velocitatum: hoc mirum non videbitur ſi advertatur quod §. 62 innuimus; ubi poſito centro in S corpus ſupponebatur ex puncto P repelli vi centrifuga in infinitum, deinde vi centripeta ad centrum impelli per infinitam AB: in quo motu conſiderato tanquam unico & continuato ſcala velocitatum erit verſoria PtuDF, unica ſcilicet curva ex illis duobus cruribus conſtans: ejuſque reciproca ſcala temporum elementarium erit alia ſimilis & æqualis verſoria ſdVTS: quemadmodum §. 55. fig. 17. dictum eſt de verſoriis ellipticis; itaque motus iſte incipit vi centrifuga in puncto P, deſinit vero vi centripeta in centro virium S: vides igitur nos §. 67. & 68 conſideraſſe finem hujus motus, hic vero conſiderare initium, ſed de his ſatis.

---

# EXEMPLUM IV.

*De motu corporum rectilineo in vi centrali cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali.*

## SECTIO I.

*& primum in vi centripeta.*

§. 72. DEcidat corpus ex quiete in puncto A recta ad centrum virium S, ſitque vis AD in puncto A ad vim BE in quolibet alio puncto B reciproce ut $SB^3$ ad $SA^3$: ſcala virium DE erit hyperbola quarti gradus inter aſymptota SA, SC; ejuſque æquatio erit BE (f) = Fig. 24.
$\frac{1}{BS^3}\left(\frac{1}{z^3}\right)$.

§. 73.

§. 73. Quare area EBSC (S. ſdx) $= S. \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2xx}$: & poſito $x = SA = a$, erit area DASC $= \frac{-1}{2aa}$: itaque æquatio ad ſcalam velocitatum AF erit (ſ. 10) $uu = -\frac{1}{2aa} + \frac{1}{2xx} = \frac{2aa - 2xx}{4aaxx}$ ſive $uu = \frac{aa - xx}{aaxx}$, & $u = \sqrt{\frac{aa - xx}{ax}}$, hoc eſt ſi centro S radio SA deſcribatur quadrans circuli ATR, velocitas in quolibet puncto B corporis cadentis ex A eſt proportionalis $\frac{BT}{BS}$. Geometricam demonſtrationem facile quiſque deducet ex natura hyperbolæ DE eadem plane ratione ac exemplo præcedenti ſ. 49.

Scala ergo velocitatum erit curva AF talis, ut ex quolibet puncto F coordinatis FB, FO, quarum FB exprimat velocitatem in puncto B, ſit $FB^2 = \frac{BT^2}{BS^2}$, ſive $FB^2 \times BS^2 = BT^2 \times M^2$ (M eſt quantitas conſtans arbitraria); additoque communi $M^2 \times SB^2$, erit $FB^2 \times BS^2 + M^2 \times BS^2 = M^2 \times BS^2 + M^2 \times BT^2 = M^2 \times ST^2 = M^2 \times SA^2$: unde ſi pro M arbitraria ſumatur ipſa SA, jungaturque AO, erit $FO^2 \times OA^2 = SA^4$ ſive $FO \times OA = SA^2$, quæ eſt curva genita ex ſectione axi parallela ſolidi acuti hyperbolici Torricelliani.

Si

Si enim (Fig. 25.) hyperbola apolloniana AP circa aſymptoton MN revolvatur, & plano axi MN parallelo ſecetur, proveniet curva noſtra AF, quæ una eſt ex verſoriis, de quibus egimus in epiſtola noſtra ad Cl: Lorentinium.

§. 74. Poteſt etiam conſtrui hæc curva eodem plane modo ac §. 49. verſoria elliptica, ſeu circularis, adhibito loco ſemicirculi quadrante Fig. 24.
ATR: nam ducta ex centro quacumque ST, quæ ſecet peripheriam in T, & tangentem AH in H, erit SB (x). BT ($\sqrt{aa-xx}$) :: SA (a). AH $= \frac{a\sqrt{aa-xx}}{x}$ eſt ergo AH = ordinatæ BF.

§. 75. Quod ſi corpora duo decidant ex variis a centro diſtantiis, puta ex punctis A, a; & poſt lapſum per quaslibet ſpatii partes AB, ab quæratur ratio velocitatum in punctis B, b, reperietur eadem conſtructione ac §. 51. velocitas in B corporis cadentis ex A ad velocitatem in b corporis cadentis ex a, eſſe ut $\frac{BT}{BS \times SA}$ ad $\frac{bt}{bS \times Sa}$; quemadmodum §. 73. analytice repertum eſt.

§. 76. Coroll: Si diſtantiæ a centro AS, aS proportionaliter dividantur in B, b, ita ut ſit AS, ſeu TS. SB :: aS, ſeu tS. Sb, atque adeo BT. BS :: bt, bS, & $\frac{BT}{BS} = \frac{bt}{bS}$; velocitates in punctis B, b erunt inter ſe in ratione conſtanti, nempe reciproca diſtantiarum aS, AS.

§. 77. Porro cum ſcala velocitatum ſit (§. 73)

$u = \frac{\sqrt{aa - xx}}{ax}$ ejus reciproca $z = \frac{ax}{\sqrt{aa - xx}}$ erit

ſcala temporum elementarium SG, quæ etiam conſtrui poteſt ut §. 74. ducta a centro qualibet ST ſecante peripheriam in T, & in K tangentem RK ad alteram quadrantis extremitatem K: nam eſt BT $(\sqrt{aa - xx})$. BS $(x)$ : : SL. LT : : SR $(a)$. RK $= \frac{ax}{\sqrt{aa - xx}}$; quare ſi ſumantur ordinatæ BG æquales tangentibus RK, habebitur ſcala temporum elementarium SMG.

§. 78. Demum tempus integrum erit $t =$ S. $\frac{-axdx}{\sqrt{aa - xx}} = a\sqrt{aa - xx}$;

hoc eſt tempus (§. 10.) ab initio motus in A per AB erit proportionale ordinatæ BT ad circuli quadrantem ATR, eritque quadrans ſcala temporum integrorum, & quidem ducta ordinata MN infinite proxima ad GT, & ex T lineola TZ parallela ad BX, ob ſimilitudinem triangulorum TZN, TBS, erit TZ ſeu BX. ZN : : TB. BS. eſt vero ex conſtructione ſcalæ SG temporum elementarium TB. BS : : SA. BG. ergo BX. ZN : : SA. BG, & $BG \times BX$, ſeu area infinite parva GBXM æqualis rectangulo $SA \times ZN$; atque adeo ſumma illarum arearum, nempe area AYGB (nimirum tempus per AB) æquatur ſummæ horum rectangulorum, hoc eſt rectangulo conſtantis SA in ordinatam quadrantis BT.

§. 79.

§. 79. Demonſtrabitur etiam ex §. 75. tempora per AB, ab corporum cadentium ex A, a eſſe inter ſe ut $BT \times SA$ ad $bt \times Sa$. Ideoque tempora per AS, aS corporum cadentium ex punctis A, a uſque ad centrum, ſunt ut quadrata altitudinum AS, aS: quod etiam ex coroll. §. 76. demonſtrari poteſt eodem ratiocinio quo uſi ſumus §. 57. Ex quo colligitur, tempora per BS, bS corporum cadentium ex A, a eſſe inter ſe ut $SA \times LR$, ſive $SA \times TP$ ad $Sa \times tp$.

§. 80. Si ergo centris R, r deſcribantur per S circuli SD, Sd, quos ſecet BMT ordinata ex quolibet puncto B erunt tempora per BS corporum cadentium ex punctis A, a ut $BT \times SR$ ad $BM \times Sr$, ſive ut BT ad $\frac{BM \times Sr}{SR}$: itaque ſi fiat SR. Sr, ſive SA . Sa: : BM. ad quartam $BN = \frac{MB \times Sr}{SR}$; erunt tempora illa inter ſe ut BT ad BN. Reperiet vero ſtudioſus lector, BN eſſe ordinatam ad ellipſem SNE, cujus ſemiaxis conjugatus EC æquatur Sa, ſemiparameter vero eſt SA eadem quæ circuli SD: ita ut ſi duo corpora decidant ex datis punctis A, a ad centrum virium S, fiantque vertice S, tangente SA, circulus & ellipſis, ſive duo ellipſes SD, SE, quarum ſemiaxes conjugati ſint ipſæ diſtantiæ a centro SA, Sa; parameter vero ſit quævis data, ſed eadem in utraque ellipſi, eademque proinde curvatura ad communem verticem S: erunt hujuſmodi ellipſes ſcalæ temporum integrorum relativæ per ſpatia percurrenda uſque ad centrum. Fig. 26.

§. 81. Quæ diximus exemplo præcedenti §. 58. & ſequentibus valent etiam in hac lege virium cubis altitudinum reciproce proportionalium.

Itaque quoniam corpus libere cadendo ex puncto quolibet A uſque ad centrum S tranſit per omnes gradus velocitatis uſque in infinitum, ideo ſupponi poteſt in dato puncto A ea velocitate donatum quam acquireret libere cadendo ex eodem puncto A uſque ad datum punctum B: indeque quæri poteſt ſublimitas Aa, unde corpus libere cadendo datam illam velocitatem in puncto A acquirat. Ea ſublimitas reperitur ex dictis §. 75, ubi demonſtratum eſt, corporum libere cadentium ex punctis A, a velocitates in punctis B, A eſſe ut $\frac{BT}{BS \times SA}$ ad $\frac{AV}{AS \times Sa}$, ſive ut $\frac{BT}{BS}$ ad $\frac{AV}{Sa}$: Si ergo velocitates iſtæ ponantur æquales erit $\frac{BT}{BS} = \frac{AV}{Sa}$, & $BS^2 . BT^2 :: Sa^2 . AV^2$, ſeu (quoniam $BT^2 = SA^2 - SB^2$, & $AV^2 = Sa^2 - SA^2$) $BS^2 . SA^2 - SB^2 :: Sa^2 . Sa^2 - SA^2$, ac demum dividendo $2BS^2 - SA^2 . SB^2 :: SA^2 . Sa^2$, cujus proportionis tres priores termini noti dabunt quartum Sa ſublimitatem quæſitam.

Fig. 24.

§. 82. Porro ſi duplum quadrati SB majus ſit quadrato SA, primus terminus proportionis $2BS^2 - SA^2$ erit affirmativus, & ſublimitas Sa affirmativa ad partes ſuperiores ſumenda, ut in fig. 24. Quod ſi quadratum SA ſit duplum quadrati SB, primus terminus nihilo erit æqualis, & ſublimitas Sa infinita ut in fig. 27. Si demum quadratum SA ſuperet duplum quadrati SB, primus terminus negativus dabit quartum negativum, ſcilicet ſublimitas SP ut in fig. 28. ad partes contrarias ſumenda erit.

§. 83. Itaque ſi altitudo SA (a) unde motus inci-

Incipit ex quiete ponatur infinita, æquatio ad Fig. 27.
ſcalam velocitatnm (§. 73.) $u = \frac{\sqrt{aa - xx}}{ax}$ evadit $u = \frac{1}{x}$, ſive $ux = 1$, nempe hyperbola apolloniana Ff; & ſcala temporum elementarium $z = x$ triangulum GSB: Scala vero temporum integrorum per ſpatia quæ remanent percurrenda uſque ad centrum erit $t = S.\, xdx = x^2$, ſcilicet parabola SM, cujus vertex S, tangens ad verticem SA. Facile hæc ſtudioſus lector geometrice demonſtrabit eodem quo hactenus uſi ſumus ratiocinio.

§. 84. Eodem ratiocinio facile etiam demonſtrabitur velocitatem in quovis puncto B corporis cadentis ex infinita diſtantia ad velocitatem in eodem puncto B corporis cadentis ex dato puncto A eſſe ut SA ad BT, ſive ut ST ad TB, vel ut SH ad HA. Eſt autem HA æqualis ordinatæ BF ad curvam AF ſcalam velocitatum (§. 74.) corporis cadentis ex puncto A. Ergo ſi ad eamdem abſciſſam SB ponatur alia ordinata æqualis SH, erit hæc ordinata ad hyperbolam (§. 83.) ſcalam relativam velocitatum corporis cadentis ex infinita diſtantia, in qua hyperbola rectangulum ordinatæ SH in abſciſſam SB æquatur quadrato SA; eſt enim SH . SA :: ST (SA). SB. Fig. 24.

§. 85. Cumque ob ſimilitudinem triangulorum ASH, RKS ſit AH ſive BF. AS :: RS ſive AS. RK, ſitque RK æqualis (§. 77.) BG ordinatæ ad curvam SMG ſcalam temporum elementarium corporis cadentis ex A, erit $BF \times BG =$ eidem quadrato AS: quare rectangulum $BF \times BG$ æquatur rectangulo $SH \times SB$ eſt autem (§. 84.) SH æqualis ordinatæ in puncto B ad hyperbolam

lam ſcalam relativam temporum elementarium corporis cadentis ex infinita diſtantia: ergo ſi in eodem puncto B ponatur alia ordinata æqualis ipſi abſciſſæ SB, erit hæc ordinata ad triangulum rectangulum iſoſcele, quod erit (ſ. 83.) ſcala temporum elementarium relativa corporis cadentis ex infinita diſtantia.

Ex quo colligitur (ſ. 14.) tempus per quamlibet ſpatii partem BS corporis cadentis ex puncto A ad tempus per eamdem BS corporis cadentis ex infinita diſtantia eſſe ut $SA \times LR$ ad dimidium quadrati SB, vel ut $2SA \times LR$ ad $SB^2$, ſive (fig. 27.) ut $CS \times SL$ ad $SB^2$, vel ut SL ſive TB ad $\frac{SB^2}{SC}$: Porro ſi vertice S, parametro SC deſcribatur parabola SNM, quam tangat recta SA, erit $BN = \frac{SB^2}{SC}$: ergo tempora illa ſunt inter ſe ut BT ad BN; & ſcalæ temporum integrorum relativæ ſunt circulus STD, & parabola SNM eadem parametro deſcripta.

Obſervari poteſt, in puncto A ordinatam AD ad circulum duplam eſſe ordinatæ AM ad parabolam; adeoque tempus deſcenſus corporis ex quiete in A uſque ad centrum S duplum eſſe temporis quo idem ſpatium AS percurritur a corpore cadente ex infinita diſtantia.

Fig. 28. ſ. 86. Denique ſi quadratum SA ſuperet duplum quadrati SB, & corpori in puncto A ea velocitas imprimatur, quam acquireret libere cadendo ex eodem puncto A uſque ad B, fieri debet (ſ. 82.) $SA^2 - 2SB^2 . SB^2 :: SA^2 . SP^2$, ipſaque SP ad partes contrarias ſumenda erit; factiſque hyperbolis, ſeu ſcalis virium centralium ED, Oq, facile demonſtrabitur ex natura harum hyperbolarum, ſpatium hyperbolicum

ABED

ABED æquale eſſe utroque ſimul ſpatio infinite longo PqO, AQD; atque adeo (§.4.) velocitas in puncto B corporis cadentis ex A æqualis erit velocitati in puncto A corporis, quod ſupponitur (§.62.) moveri ex quiete in puncto P ac ſpatia infinita Pq, QA percurrere. Itaque quadratum velocitatis corpori impreſſæ in puncto A erit proportionale ſummæ arearum hyperbolicarum PqO, AQD, quæ areæ ſunt duplæ rectangulorum OPS+DAS. Eademque ratione ubi idem corpus impulſum cum dicta velocitate in puncto A pervenerit ad quodlibet aliud punctum B, quadratum velocitatis in B erit proportionale ſummæ arearum PqO, BQE, hoc eſt ſummæ rectangulorum OPS+EBS.

Igitur ſi ponatur uti §. 73. SP = a, SB = x, erit $uu = \frac{1}{2aa} + \frac{1}{2xx} = \frac{2aa+2xx}{4aaxx}$, ſive $u = \frac{\sqrt{aa+xx}}{ax}$: hoc eſt poſita SR = SP = a, ſi centro S, vertice R deſcribatur hyperbola æquilatera RT, ad quam ordinetur BT ex puncto B, erit $SR^2 (aa) + SB^2 (xx) = BT^2$, ideoque velocitas in puncto B erit proportionalis $\frac{BT}{BS}$.

Cum vero (ducta ex P recta PH ordinatis PT parallela) ſit BT. BS :: PH. PS, adeoque $\frac{BT}{BS} = \frac{PH}{PS}$, erit velocitas in B proportionalis rectæ PH (nam PS eſt linea conſtans): ergo ſi ad abſciſſam SB ponatur ordinata BF = PH, punctum F erit in *ſcala velocitatum* FC. Hæcque conſtructio plane eadem eſt cum ea,

 quam

quam adhibuimus §. 74. poſita hic hyperbola loco circuli.

§. 87. Quæ dicta ſunt §. 75. & 76. hic etiam applicari poſſunt.

§. 88. Scala temporum elementarium (reciproca nempe ſcalæ velocitatum) erit $z = \frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$, quæ conſtruitur uti §. 77. ducta a centro qualibet ST ſecante hyperbolam in T, & in K tangentem RK ad verticem R; (nam eſt $BT(\sqrt{aa+xx}) . BS(x) :: SR(a) . RK = \frac{ax}{\sqrt{aa+xx}}$; itaque ſumpta BG = RK, erit punctum G in ſcala temporum elementarium SGM.

§. 89. Tempus integrum erit $t = S. \frac{-axdx}{\sqrt{aa+xx}} = -a\sqrt{aa+xx}$; hoc eſt tempus per BS, ſcilicet per ſpatium percurrendum (§. 10.) uſque ad centrum, deberet eſſe proportionale ordinatæ BT ad hyperbolam: ſed advertendum quod poſito SB, ſeu $x = 0$, tempus t, ſeu area SBG erit nulla, attamen quantitas $a\sqrt{aa+xx}$ remanent adhuc $a\sqrt{aa}$, ſeu aa; hæc ergo quantitas ſubducenda erit ita ut ſit $t = a\sqrt{aa+xx} - aa$. tempus igitur per BS erit proportionale BT — SR, ſive VT. Et quidem ducta ordinata MN infinite proxima ad GT, & ex T lineola TZ, erit BX ſeu TZ ad ZN ut ſubtangens ad ordinatam BT, ſive (ex conicis) ut

BT

BT ad BS, hoc eſt ut SL ad LT; ſeu ut SR ad RK æqualem BG: quare rectangulum $BG \times BX$, ſeu area infinite parva GBXM æqualis erit rectangulo $SR \times ZN$: atque adeo ſumma illarum arearum, nempe area SGB (nimirum tempus per BS) æquatur ſummæ horum rectangulorum, nimirum rectangulo $SR \times VT$.

§. 90. Ne nimii ſimus in hiſce amœniſſimis quidem, ſed fortaſſe nonnullorum judicio aridis contemplationibus, ſufficiat innuere, ſimilia hic demonſtrari poſſe iis quæ §. 79., 80., 84., & 85. demonſtrata ſunt; ac tandem colligi quid ſimile §. 70. præcedentis exempli: nimirum ſi plura corpora in dato puncto A impellantur verſus centrum S, diverſis gradibus velocitatis, Fig. 29. iis videlicet, quos acquirerent corpora cadendo libere ex eodem puncto A per AB, vel per A3, vel per Ab, poſito $AS^2$ minore quam $2SB^2$; itemque $AS^2 = 2S3^2$; ac demum $AS^2$ majore quam $2Sb^2$: facta conſtructione §. 81., repertiſque ſublimitatibus vel poſitivis ut SP, vel infinita, vel negativis ut Sp: ſi eodem vertice S ac tangente ad verticem SA, deſcribantur ellipſis SC, parabola SE, & hyperbola SG, facto videlicet SP ellipſis, & Sp hyperbolæ ſemiaxe conjugato; parameter vero eadem ſit omnium ſectionum ita ut ad communem verticem S ſint ejuſdem curvaturæ: Hoc poſito tempora deſcenſus horum corporum per quamlibet altitudinem BS erunt inter ſe ut reſpectivæ ordinatæ ex puncto B in conicis illis ſectionibus, nimirum ut BC, BE, BG.

Si ordinata BC ducatur ex ipſo puncto P unde corpus decidit ex quiete, hoc eſt PH, quæ tanget ellipſim in altero vertice H; reperietur PH dupla ordinatæ PM ad parabolam: itemque (ſi ponatur SD, æqualis Sp, ad angulos rectos ſuper SP, & ex ducta DP abſcindatur $DF = DS$)

DS ) eadem PH reperietur eſſe ad ordinatam PN ad hyperbolam ut quadratum SP ad rectangulum $Sp \times PF$: Tempus ergo lapſus rectilinei ex quiete in P per altitudinem PS duplum eſt temporis quo eadem PS percurritur a corpore lapſo ex infinita diſtantia, & ad tempus quo eadem PS percurritur a corpore proveniente ex ſublimitate negativa Sp, eſt ut quadratum SP ad rectangulum $Sp \times PF$.

## SECTIO II.

*De motu corporum rectilineo in vi centrifuga cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali.*

§. 91. EOdem plane modo reperientur celeritates & tempora in vi centrifuga. Sit centrum virium centrifugarum S, & corpus ex dato puncto P repellatur a centro per rectam Pb: ſitque $SP = a$, $Sb = x$, reperietur in puncto quolibet b velocitas $u = \frac{\sqrt{xx - aa}}{ax}$; hoc eſt ſi centro S vertice P deſcribatur hyperbola æquilatera Pt, quæ eſt conjugata hyperbolæ ſupra deſcriptæ RT, erit Sb $(x)$. bt $(\sqrt{xx - aa})$ :: SP $(a)$. $Ph = \frac{a\sqrt{xx - aa}}{x}$; adeoque Ph eſt proportionalis velocitati bf in puncto b: at curva Pf eadem non eſt quæ ſupra deſcripta SGM, nam abſciſſæ ſunt diverſæ, ſed potius eadem ac curva CF, uti patet ſi ubi hyperbola Pt abjerit in infinitum, & ſecans St coinciderit cum aſymptoto, eadem conſtructio exinde

de continuetur in hyperbola conjugata dRT

§. 92. Hujus curvæ reciproca ſeu ſcala temporum elementarium erit cg, cujus æquatio $z = \frac{ax}{\sqrt{xx - aa}}$, quæ ſimiliter conſtruitur ope ſecantis tSK: nam bt $(\sqrt{xx - aa})$. bS (x) : : Sr (a) . rK $= \frac{ax}{\sqrt{xx - aa}} =$ bg. Eademque conſtructio continuata in hyperbola conjugata dRT dabit curvam ſupra deſcriptam MGS. Studioſus lector reperiet analogiam ſimilemque conſtructionem harum curvarum cum curvis AFI, SMG fig: 24; atque hic etiam poteſt animadvertere idem quod diximus § 71, conſiderandum videlicet corpus ex quiete in puncto P (fig: 28.) repelli a centro virium S vi centrifuga per infinitam Pq, indeque per infinitam QS ad centrum deſcendere vi centripeta: in quo motu integra ſcala velocitatum erit PfCF, & integra ſcala temporum elementarium gcMGS, quod de hyperbola etiam dici poteſt quæ eſt ſcala temporum integrorum ut in ſequenti §

§. 93. Tempus inregrum per Pb erit $t = S. \frac{axdx}{\sqrt{xx - aa}} = a\sqrt{xx - aa}$, ſcilicet proportionale ordinatæ bt ad hyperbolam: quod patet etiam eadem demonſtratione § 89; nam ducta infinite proxima mn ad gt, erit bz ſive tz ad zn ut ſubtangens ad ordinatam bt, ſeu (ex conicis) ut bt ad bS, ſive ut Sr ad rK ſeu ad bg: ergo rectangulum bg$\times$bx, hoc eſt area infinite parva gbzm æquatur rectangulo Sr ſive SP$\times$zn: & ſumma illarum arearum, hoc eſt

area

area HPbg ( tempus ſcilicet per Pb ) æquatur ſummæ horum rectangulorum , hoc eſt rectangulo conſtantis SP ductæ in ordinatam bt :

# EXEMPLUM V.

*De motu corporum rectilineo in vi centrali diſtantia a centro reciproce proportionali :*

§. 94. DEcidat corpus ex quiete in puncto A recta ad centrum virium S ; ſitque vis AD in puncto A ad vim BE in alio quolibet puncto B reciproce ut SB ad SA : ſcala virium DE erit hyperbola conica , ejuſquæ æquatio $BE = \frac{aa}{SB}$, ſcilicet $f = \frac{aa}{x}$ ;

Fig. 30.

§. 95. Porro areæ hyperbolicæ ABED ( cui proportionale eſt uu quadratum velocitatis in B ) differentiale fdx eſt $\frac{dx}{x}$, cujus integrale eſt logarithmus ipſius x ( § 44 ) ; nimirum uu $= S.\frac{dx}{x} = l.x$ : æquatio ergo ad ſcalam velocitatum AF erit $BF^2 (uu) = l.x$, quæ eſt logarithmica ſecundi gradus.

§. 96. Scala temporum elementarium SG reciproca ſcalæ velocitatum erit alia logiſtica ; cujus æquatio $BG^2 (zz) = \frac{1}{l.x}$.

Tempus vero integrum per AB erit t = S.

Eſt

$\frac{dx}{\sqrt{l.x}}$. Eſt autem $uu = l.x$, & differentiando $2udu = \frac{dx}{x}$, atque adeo $xdu = \frac{dx}{2u} = \frac{dx}{2\sqrt{l.x}}$: ergo $t = S.\,2xdu$; ſcilicet tempus per AB proportionale areæ AFSC, hujus quippe areæ differentia eſt $xdu$.

§. 97. Idem reperietur in vi centrifuga, dummodo in conſtructione harum logiſticarum advertatur SB ſeu x eſſe majorem SA ſeu a.

§. 98. Ut hæc clariora fiant harum logiſticarum geneſin paucis indicabo. Ad aſymptotum Sm fiat logiſtica AH, cujus ſubtangens æquetur AS, & ad diametrum Sm ſit quælibet curva Sfn, cujus æquatio $fb^n = Sb$ (exponens n eſt numerus integer vel fractus poſitivus vel negativus) productaque qualibet ordinata fb uſque ad logiſticam in H, inde ducatur aſymptoto Sb parallela HB, quæ protrahatur uſquedum BF æquetur reſpondenti ordinatæ ad curvam illam bf: Curva, quæ per omnia puncta F ſic inventa tranſit, erit ex genere logiſticarum, quæ gradum, poſitionemque pro diverſitate curvæ Sf mutabit. Et ſi quidem Sf ſit linea recta, curva AF erit eadem prima logiſtica AH. Quod ſi Sf ſit parabola conica, curva AF erit logiſtica ſecundi gradus, quæ eſt ſcala velocitatum in hac virium centripetarum hypotheſi; eſt enim $BF^2 . MN^2 :: bf^2 . mn^2 :: Sb . Sm ::$ log: SB. log: SM, ſcilicet $BF^2\,(uu) = $ log. SB (l. x) §. 95. Si vero curva gr ſit hyperbola ſecundi gradus inter aſymptota Sm, SQ, cujus æquatio $bg^2 = \frac{1}{Sb}$, logiſtica inde orta SRG erit

re-

reciprocâ logiſticæ AFN genitæ a parabola, atque adeo ſcala temporum elementarium in prædicta hypoteſi. Atque ita pro varietate curvæ Sf, alia atque alia oritur logiſtica AF, cujus generalis æquatio eſt $BF^n = l.SB$.

Si in hac virium centralium hypotheſi vis ſit centrifuga, ad conſtruendas ſcalas velocitatum & temporum adhibenda eſt ſuperior pars logiſticæ primariæ AH jacens ad alteras partes ſubtangentis SA, ubi SB ſeu bH ſunt majores quam SA.

---

# EXEMPLUM VI.

*De motu corporum rectilineo in vi centrali, quæ ſit proportionalis poteſtati m − 1 diſtantiarum a centro.*

§. 99. Ut hujus generis exempla omnia complectamur ponatur ea lex vis centralis, ut in qualibet diſtantia SB a centro virium S ſit ut ipſius diſtantiæ poteſtas quælibet
Fig. 3.
$m - 1$, eritque $f = x^{m-1}$ æquatio ad ſcalam virium DE. Quare $S.fdx = S.x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m}$; & æquatio ad ſcalam velocitatum AF in vi centripeta (§. 10. 13.) $uu = Q - S.fdx$ evadet $uu = \frac{a^m - x^m}{m}$, ejuſque reciproca $zz = \frac{m}{a^m - x^m}$ erit ſcala GL temporum elementarium.

rium. Et demum æquatio ad ſcalam AH temporum integrorum erit $t = S.\frac{-\sqrt{\overline{md}}\,x}{\sqrt{a^m - x^m}}$.

§. 100. Si numerus m æquetur nihilo erit uu $= \frac{a^0 - x^0}{0} = \frac{0}{0}$: hic ergo caſus aliam exigit ſolutionem, quam dedimus exemplo prædi §. 94: eſt enim in hoc caſu $f = x^{0-1} = \frac{1}{x}$.

§. 101. Si numerus m ſit negativus, adeoque $-m$ poſitivus, quadratum velocitatis uu $= \frac{a^m - x^m}{m}$ non eſt negativum (quod eſſet abſurdum, nam ejus radix, nempe velocitas foret immaginaria) ſed remanet poſitivum: etenim cum a in vi centripeta ſit major quam x, & exponens m ſit negativus, erit $a^m$ minor quam $x^m$, adeoque numerator prædictæ factionis $a^m - x^m$ eſt negativus, quemadmodum denominator m; itaque mutanda ſunt ſigna remanente eadem fractione, & æquatio ad ſcalam velocitatum erit uu $= \frac{x^m - a^m}{-m}$, ſive $= \frac{\overline{a}^{\,m} - \overline{x}^{\,m}}{\overline{a}^{\,m}\,x^{-m}}$; ex qua habentur æquationes ad ſcalas temporum.

§. 102. Si diſtantia SA $=$ a unde motus incipit ponatur infinita, diſtinguendus eſt caſus exponentis m poſitivi vel negativi nam ſi ſit poſitivus erit (§. 99.) uu $= \frac{a^m - x^m}{m} = \frac{\infty^m - x^m}{m}$,

ve-

velocitas ſcilicet infinita. At ſi m ſit negativus, poteſtas negativa m quantitatis infinitæ aæquatur nihilo, ſcilicet $\infty^{m} = \frac{1}{\infty^{-m}} = 0$; itaque (§. 101.) $uu = \frac{x^m - a^m}{-m} = \frac{x^m - 0}{-m}$: æquatio ergo ad ſcalam velocitatum erit in hoc caſu $uu = x^{m} = \frac{1}{x^{-m}}$, & $zz = x^{-m}$, & $t = S.\sqrt{x^{-m}}$

$dx = \frac{2}{2-m} x^{\frac{2-m}{2}}$.

§. 103. Demum ſi in hoc caſu exponentis m negativi corpus ab infinita diſtantia non ex quiete decidat, ſed adhuc ibi cum aliqua velocitate motum incipere ponatur, cum ea videlicet quam acquireret ſi a puncto infinite diſtanti, decideret uſque ad diſtantiam SR, vel ſi ex quiete in dato puncto R vi centrifuga a centro S repelleretur in infinitum, & poſtea vi centripeta ad ipſum impelleretur per mAB: in hoc inquam caſu (poſitis SR = a, SB = x) erit area infinite longa RNC $= \frac{1}{a^{-m}}$ (§. 102.) & area infinite longa BME $= \frac{1}{x^{-m}}$ quarum arearum ſumma $\frac{1}{a^{-m}} + \frac{1}{x^{-m}}$, ſeu $\frac{a^{-m} + x^{-m}}{a^{-m}\, x^{-m}}$ eſt proportionalis quadrato velocitatis in puncto B: itaque ſcala veloci-

locitatum erit $uu = \frac{a^{-m} + x^{-m}}{a^{-m} x^{-m}}$; ex qua habentur æquationes ad ſcalas temporum.

§. 104. Si corpus in dato puncto A impellatur verſus centrum, eique hoc impulſu imprimatur ea velocitas quam acquireret in puncto B libere cadendo ex quiete in eodem puncto A per AB; quæraturque *ſublimitas* Sb, ſeu punctum ſublime b unde cadere debet ut in dato puncto A datam illam velocitatem acquirat: facile ea ſublimitas reperietur ex dictis §. 99. ubi demonſtratum eſt, quadratum velocitatis in B corporis cadentis ex A eſſe proportionale areæ ABED, hoc eſt $\frac{SA^m - SB^m}{m}$; ſimiliterque quadratum velocitatis in A corporis cadentis ex b eſt $\frac{Sb^m - SA^m}{m}$: itaque quoniam velocitates iſtæ ponuntur æquales erit $\frac{SA^m - SB^m}{m} = \frac{Sb^m - SA^m}{m}$; adeoque $Sb^m = 2SA^m - SB^m$.

§. 105. Si exponens m ſit poſitivus valor ſublimitatis Sb erit ſemper poſitivus, quippe $2SA^m$ major quam $SB^m$: eſſe tamen poteſt SB $= 0$, hoc eſt velocitas qua corpus impellitur in puncto A eadem quam acquirit cadendo ex A uſque ad centrum: tumque erit $Sb^m = 2SA^m$. Imo velocitas qua corpus impellitur in puncto A poteſt eſſe major ea quam acquirit cadendo ex A uſque ad centrum, tanto exceſſu velocitatis quantam acquireret cadendo ex puncto B uſque ad centrum, tumque erit $Sb^m = 2SA^m + SB^m$.

§. 106. At ſi exponens m ſit negativus, erit

$$\frac{1}{Sb^{-m}} = \frac{2}{SA^{-m}} - \frac{1}{SB^{-m}} = \frac{2SB^{-m} - SA^{-m}}{SA^{-m}SB^{-m}};\ \&$$

$$Sb^{-m} = \frac{SA^{-m}SB^{-m}}{2SB^{-m} - SA^{-m}}:$$ Quare ſi $2SB^{-m}$ ſit major quam $SA^{-m}$, valor ſublimitatis Sb erit poſitivus, & ad partes ſuperiores ſumendus: ſi vero $2SB^{-m}$ ſit æqualis $SA^{-m}$, ſublimitas erit infinita: ſi demum $2SB^{-m}$ ſit minor quam $SA^{-m}$, ſublimitas erit negativa, & ad partes contrarias accipienda, puta SR. Hac igitur ratione moveri poteſt corpus in puncto A impulſum verſus centrum S, etiam in hypotheſi exponentis m negativi, eodem motu ac ſi ab infinita diſtantia cecidiſſet, aut a puncto R vi centrifuga in infinitum abiiſſet, indeque vi centripeta per mAB deſcendiſſet uti §. 102. & 103. explicatum eſt.

§. 107. Eodem modo reperientur ex dictis §. 11. celeritates & tempora in vi centrifuga. Si enim corpus ex quiete in dato puncto A recedat a centro S vi centrifuga $f = x^{m-1}$; quoniam Sb (x) eſt major quam SA (a), æquatio ad ſcalam velocitatum Af erit $uu = x^m - a^m$ quoties m eſt numerus poſitivus, in quo caſu diſtantia data SA (a) poteſt eſſe nulla, vel poſitiva (vide §. 44. & 45.) hoc eſt $uu = x^m$, vel $uu = x^m + a^m$.

§. 108. Quod ſi numerus m ſit negativus erit

$$uu = \frac{1}{a^{-m}} - \frac{1}{x^{-m}} = \frac{x^{-m} - a^{-m}}{a^{-m}x^{-m}}:$$ in quo caſu ſi a poneretur $= o$, velocitas foret infinita. Porro

reper-

reperta. ſcala velocitatum reperientur ex dictis ſcalæ temporum.

§. 109. Si quis geometrice hæc quæ hactenus dicta ſunt examinare cupiat, animadvertat oportet, quod ſi numerus m ponatur poſitivus major unitate, ſcala virium centralium EDe, cujus æquatio $f = x^{m-1}$ erit ex genere parabolarum vertice S deſcriptarum, quæ quidem parabolæ, ſi m ſit major binario, convexitatem ad rectam SA convertent. Si vero m ſit æqualis binario, parabola vertetur in triangulum. Si autem m ſit minor binario, ſed major unitate, parabolæ convertent concavitatem ad rectam SA: quod ſi m ponatur unitati æqualis erit $f = x^0 = 1$, vis nempe conſtans, & ſcala virium rectangulum. Semper autem ſive parabolæ, ſive triangulum, ſive rectangulum, area AmD ad partes ſuperiores ordinatæ AD erit infinita.

Item ſi numerus m ponatur poſitivus minor unitate, exponens $m-1$ evadet negativus minor unitate, & ſcala virium centralium erit $f = \frac{1}{x^{1-m}}$, ſcilicet hyperbola inter aſymptota SM, Sm, cujus ſpatium aſymptoticum AmD ad partes ſuperiores ordinatæ AD eſt infinitum, ſpatium vero ASMD verſus centrum eſt finitæ quantitatis, quippe poteſtas $1-m$ abſciſſarum x minor eſt unitate, quæ ponitur poteſtas ordinatarum f.

At ſi numerus m ponatur negativus, exponens $m-1$ erit negativus major unitate, & ſcala virium $f = x^{m-1}$ erit hyperbola inter aſymptota in qua ordinatæ AD, BE, ſunt reciproce ut abſciſſarum SB, SA poteſtates unitate majores;

jores ; quare ſpatium aſymptoticum AmD ad partes ſuperiores ordinatæ AD erit finitum, ſpatium vero ASMD verſus centrum erit infinitum.

Igitur quoties m eſt numerus poſitivus ſive minor unitate, ſemper ſpatium AmD ſive parabolicum ſive hyperbolicum erit infinitum, reliquum vero ASMD verſus centrum finitæ quantitatis: contra vero ſi m ſit numerus negativus, ſpatium hyperbolicum ASMD verſus centrum erit infinitum, ſpatium vero AmD erit finitæ quantitatis, quare in primo caſu numeri m poſitivi quadratum velocitatis BF (uu) erit ut ASMD—BSME $(a^m - x^m)$; at in ſecundo caſu numeri m negativi quadratum velocitatis BF (uu) erit ut BmE — AmD $\left(x^m - a^m\right.$, ſive $\left.\frac{1}{x^{-m}} - \frac{1}{a^{-m}}\right)$.

# PROPOSITIO IV.

## PROBLEMA.

*Data ſcala velocitatum in corporis motu rectilineo vires centrales analytice invenire.*

§. 110. HOC problema eſt inverſum problematis præcedentis Prop. III., in quo data ſcala ſeu lege virium centralium quærebatur ſcala velocitatum. Advertendum vero eſt, præcedens problema eſſe indeterminatum, ſiquidem eadem poſita lege virium centralium plures poſſunt eſſe ſcalæ velocitatum, quæ determi-

terminantur, quoties datum ſit etiam punctum, ſeu diſtantia a centro virium, unde corpus incipiat moveri ex quiete, aut cum data velocitate; ita ut percurrendo caſus omnes diſtantiarum a centro, & velocitatum, quas corpus initio motus habere poteſt, reperientur ſcalæ omnes velocitatum in data lege virium, quemadmodum adductis exemplis fuſe explicatum eſt. At problema hoc de inveniendis viribus ex data ſcala velocitatum, quemadmodum ſequens problema, in quo ex data ſcala temporum investigabimur celeritates & vires, ſunt problemata determinata: quippe nonniſi unica eſſe poteſt ſcala virium, quæ datas velocitates per data ſpatia producant, aut quibus data ſpatia datis temporibus deſcribantur. Hæc patent ex dictis prop. I. §. 4. 5. & 6. Sed ad clariorem intelligentiam placet eadem diligentius explicare.

§. 111. Percurrat corpus ſpatium AB, ſitque in puncto quolibet Q velocitas QT = u, qua percurritur ſpatiolum infinite parvum Qq = dx: tempus dt quo ſpatiolum hoc dx percurritur eſt (§. 6.) directe ut ſpatium dx, & reciproce ut velocitas u, hoc eſt $dt = \frac{dx}{u}$. Dum itaque dati ſpatii AB pars quælibet infinite parva Qq (dx) percurritur, ſi datum ſit tempus elementare dt data etiam ſit oportet velocitas QT $(u) = \frac{dx}{dt}$: & viciſſim ſi data ſit velocitas QT [u] datum etiam ſit oportet tempus elementare $dt = \frac{dx}{u}$. Fig. 1

§. 112. Eo vero tempore dt, quo velocitate QT [u] percurritur ſpatiolum Qq [dx), vis Fig. 1

QP [f] urgeat corpus, eique ſuperaddat incrementum velocitatis infinite parvum, at, [du], erit [§. 5.] $f = \frac{du}{dt}$. Ex tribus igitur, nimirum vi QP [f] tanquam cauſſa agente, incremento velocitatis, at, [du] tanquam effectu producto, & tempore dt quo cauſſa illa hunc effectum producit, duobus datis tertium detur oportet, ſcilicet tertium ex duobus datis colligitur. Tres igitur caſus diſtinguendi ſunt.

§. 113. Primo Data ſit ſcala virium CABD ut in præcedenti problemate Prop. III., data erit in puncto quolibet Q vis QP [f], quæ urgens corpus per ſpatiolum Qq (dx) producere debet velocitatis incrementum at (du): Hoc vero incrementum pendet etiam [§. 112.] a tempore dt quo producitur, tempus autem dt pendet (§. 111.) a velocitate QT [u] qua percurritur ſpatiolum Qq: quæ quidem velocitas QT [poſita eadem ſcala virium CABD] varia eſſe poteſt, vel inæquali impulſu corpori impreſſa, vel acquiſita lapſu a diverſa ſublimitate AQ. Sola ergo ſcala virium CABD data non determinat problema, ſed detur etiam oportet punctum A unde corpus ex quiete incipiat moveri.

§. 114. Secundo Data ſit ſcala velocitatum AEB; datæ ergo ſunt in punctis quibuslibet infinite proximis Q, q velocitates QT, qt, earumque differentia at (du): & quoniam data eſt velocitas QT (u) qua percurritur ſpatiolum Qq (dx) datum etiam erit tempus [§. 111.] elementare $dt = \frac{dx}{u}$: quare determinata erit [§. 112.] in quovis puncto Q vis QP $(f) = \frac{du}{dt}$,

ac proinde determinata ſcala virium CABD.

§. 115. Tertio. Demum data ſit ſcala temporum dum corpus movetur per datum ſpatium AB: datæ ergo ſunt eorum temporum differentiæ infinite parvæ, hoc eſt tempora elementaria dt, quibus quælibet ſpatiola Qq [dx] percurrantur: proindeque data erit [§. 111.] in quolibet puncto Q velocitas QT [u] $=\frac{dx}{dt}$, ipſaque ſcala velocitatum AEB erit determinata; atque adeo determinata quoque erit [§. 114.] ſcala virium CABD. Nunc veniamus ad propoſiti problematis ſolutionem, quæ facilis ex dictis erit.

§. 116. Moveatur corpus per rectam ABE, ſitque data ſcala velocitatum, area ſcilicet quæcumque curvilinea ABCG, ita nimirum ut velocitates in quibuslibet punctis B, b ſint ut ordinatæ perpendiculares BC, bc; quæritur vis centralis qua corpus impellitur. Fig. 31.

Sint ordinatæ infinite proximæ BC, bc, ac portio ſpatii percurſi infinite parva Bb=dx, velocitas BC=u, cm=du, vis centralis BF=f; erit [§.7.] $f=\frac{udu}{dx}$, ſcilicet vis BF proportionalis ſubnormali BE datæ ſcalæ velocitatum. Itaque ex æquatione ad datam ſcalam velocitatum GC, ſumptis differentiis, eruitur facile valor vis centralis, ſeu æquatio ad ſcalam virium HF.

## SCHOLION.

§. 117. SI vis centralis corpus impellens ſit centripeta, corpus accedens ad centrum virium naturaliter movetur, & novi velocitatis gradus ei ſemper adduntur, adeoque velocitas perpetuo creſcit. Contra recedens motu retardato & violento a centro virium ejus velocitas perpetuo decreſcit. Si vero vis ſit centrifuga, corporis velocitas augetur recedendo a centro virium, qui motus ipſi eſt naturalis; contra decreſcit velocitas accedendo ad centrum. Ex quo colligitur an vis ſit centripeta vel centrifuga, nimirum ex poſitione centri virium ſeu puncti illius ad quod vires referuntur, vel ex diverſitate ſigni quo afficitur valor quantitatis f. Nam in Fig. 31. curva GC ſit ſcala velocitatum, ejusque axis ABE ſpatium quod a corpore percurritur, qui proinde per centrum virium tranſire debet: ſumantur vero tam origo abſciſſarum x, quam centrum virium verſus eamdem partem, puta verſus A, ita tamen ut creſcentibus diſtantiis a centro, ſimulque abſciſſis x ſeu AB, creſcant etiam velocitates u, hoc eſt ordinatæ BC: tam vis ex ſupradictis erit centrifuga, & valor ſubnormalis BE, ſeu vis BF affirmativus, hoc eſt ſigno poſitivo affectus: Si vero creſcentibus abſciſſis x, ordinatæ ſeu velocitates u decreſcant, vis erit centripeta, & valor ſubnormalis BE ſeu vis BF affectus ſigno negativo. Contrarium demonſtrabitur ſi origo abſciſſarum & centrum virium ad contrarias partes exiſtant.

§. 118. Quoniam corporis vi centripeta ad centrum deſcendentis velocitas perpetuo creſcit, idcirco maxima velocitas erit in ipſo centro: quare ſi data ſcala velocitatum habeat maxi-

mam

mam ordinatam u, punctum axis unde hæc maxima ducitur erit centrum vis centripetæ.

§. 119. Similiter quoniam corpus vi centrifuga a centro recedens majorem ſemper velocitatem acquirit, idcirco in ipſo centro vel nulla vel minima erit velocitas: quare ſi data velocitatum ſcala habeat minimam ordinatam u, punctum axis unde hæc ducitur erit centrum vis centrifugæ.

§. 120. In puncto in quo ſcala velocitatum occurrit axi, velocitas nulla eſt; quare in eo puncto corpus moveri incipit ex quiete.

---

# EXEMPLUM I.

§. 121. SIT $ax = uu$, erit differentiando $adx = 2udu$, & $\frac{udu}{dx} = f = \frac{1}{2}a$. Nimirum ſi corpus ex quiete in vertice parabolæ moveatur per ejus diametrum velocitatibus, quæ ſint in ſingulis ſpatii percurſi punctis ut reſpondentes ordinatæ in parabcla, ſive in ſubduplicata ratione diſtantiarum ab initio motus, ſeu a centro virium, vires centrifugæ corpus illud a centro expellentes erunt conſtantes, quod accidit in motu gravium (§. 21.

§. 122. Sit item $xu = aa$, erit $xdu = -udx$, & $\frac{udu}{dx}$. $[f] = \frac{-uu}{x} = \frac{-a^4}{x^3}$. Scilicet ſi corpus per aſymptoton hyperbolæ moveatur velocitatibus quæ ſint ut ordinatæ ad hyperbolam, ſeu reci-

reciproce ut diſtantiæ ab ejus centro, urgebitur corpus verſus centrum illud viribus centripetis, quæ erunt reciproce ut cubi diſtantiarum [ſ. 85.].

ſ. 123. Sit æquatio generalis $uu = x^{m}$, quæ exprimit omnes parabolas ubi m ſit numerus poſitivus integer vel fractus, & omnes hyperbolas ubi m ſit numerus negativus: erit $2udu = mx^{m-1}dx$, & $\frac{udu}{dx} = \frac{mx^{m-1}}{2} = f$: quare ubi m eſt poſitivus, hoc eſt in omnibus parabolis, valor quantitatis f eſt affirmativus, & vis tendens ad verticem parabolarum erit centrifuga [ſ. 107]. in hyperbolis vero ubi m eſt negativus, vis ad centrum hyperbolarum tendens erit centripeta [ſ. 102].

Scala virium centralium $f = mx^{m-1}$ [ſ. 109.] erit ex genere parabolarum quoties m eſt numerus poſitivus major unitate; quoties vero eſt negativus, ſive poſitivus minor unitate, ſcala virium erit ex genere hyperbolarum. Si $m = 1$ ut ſupra ſ. 121., vis erit conſtans, & ſcala virium rectangulum. Si $m = 0$, velocitas $uu = x^{0}$ evadit conſtans, & vis $f = mx^{m-1} = 0$ evadit nulla, uti in motu æquabili.

EXEM-

# EXEMPLUM II.

§.124. Sit $uu = x^m \pm a^m$ [§.107.], erit $\frac{udu}{dx}$ $(f) = \frac{mx^{m-1}}{2}$, hoc eſt vis centrifuga (§.117.) proportionalis poteſtati $m-1$ diſtantiarum $x$ a centro virium.

§.125. Sit $uu = a^m - x^m$ (§.99.) erit $\frac{udu}{dx}$ $(f)$ $= \frac{-mx^{m-1}}{2}$, hoc eſt vis centripeta (§.117.) proportionalis eidem poteſtati $m-1$ diſtantiarum $x$.

§.126. Sit $uu = \frac{1}{x^m} \pm \frac{1}{a^m} = \frac{a^m \pm x^m}{a^m x^m}$ (§.101, 103.) erit $f = \frac{udu}{dx} = \frac{-m}{2x^{m+1}}$; hoc eſt vis centripeta (§.117.) reciproce ut poteſtas $m+1$ diſtantiarum.

§.127. Denique ſit $uu = \frac{1}{a^m} - \frac{1}{x^m} = \frac{x^m - a^m}{a^m x^m}$ (108.),

(§. 108.), erit ſimiliter vis centrifuga $f = \frac{m}{x^{m+1}}$.

In his duobus poſtremis §. 126., 127 numerum m ſumpſimus poſitivum majoris claritatis gratia: idem tamen eſt ſi §. 124. & 125. numerus m ſumatur negativus.

---

# EXEMPLUM III.

Fig. 32. §. 128. SIT ſcala velocitatum ellipſis APS, in qua $SB \times BA$ $(x \times \overline{a-x})$. $BC^2$ (uu) : : SA (a). 2AM (b), quare $uu = \frac{bax - bxx}{a}$ erit differentiando $2udu = \frac{badx - 2bxdx}{a}$; ideoque vis centralis BF (f) $= \frac{udu}{dx} = \frac{ba - 2bx}{2a}$, ſeu proportionalis $\frac{1}{2}a - x$, hoc eſt diſtantiæ BR corporis B a puncto medio R (§. 25)

Fig. 33 34 §. 129. Sit ſcala velocitatum APS, in qua $SB^m \times BA^n$ $(x^m \times \overline{a-x}^n)$. $BC^{m+n}$ $(u^{m+n})$ : : a. b. ſcilicet æquatio $u^{m+n} = bx^m \times \overline{a-x}^n :$ reperietur vis centralis $f \left(\frac{udu}{dx}\right) = \frac{ma}{m+n} - x \times$

quæ

$$\frac{\frac{x^{\frac{m-n}{m+n}}}{a-x}}{\frac{m-n}{m+n}}$$ ; quæ eſt æquatio ad ſcalam virium FRf. Porro maxima velocitas, ſeu maxima ordinata RP in ſcala velocitatum reperietur ubi ſit abſciſſa SR $=\frac{ma}{m+n}$: unde RB=RS—SB $=\frac{ma}{m+n}-x$. Erit ergo vis f (BF) = RB $\times$ $\frac{SB^{\frac{m-n}{m+n}}}{AB^{\frac{m-n}{m+n}}}$, & punctum R centrum virium centripetarum corporis ex A, aut S ad centrum R deſcendentis.

Si n ſit major quam m, vis BF evadit=RB $\times$ $\frac{AB^{\frac{n-m}{m+n}}}{SB^{\frac{n-m}{m+n}}}$; & ſcala virium FRf poſita ut in Figura 34., ita ut A ſit vertex figuræ, SN aſymptoton, & RA major quam RS. at in fig. 33., in qua m ponebatur major quam n, eſt SR major quam RA, punctum S vertex, & AM aſymptoton.

Si m=n, evadit $f=\frac{1}{2}a-x$, eſt enim primus caſus ellipſeos apollonianæ figura 32. §. 128.

§. 130. Si ſcala velocitatum generalius ponatur

tur $u^{r} = x^{m} \times \overline{a-x}^{n}$ (exponentes r, m, n poſſunt eſſe poſitivi vel negativi) ſimili calculo repe-

rietur $f\left(\frac{udu}{dx}\right) = \overline{\frac{ma}{m+n} - x} \times \frac{x^{\frac{2m-r}{r}}}{\overline{mr+nr} \times \overline{a-x}^{\frac{r-2n}{r}}}$

Fig. 35. 39. cumque hic etiam maxima ſeu minima velocitas RP reſpondeat abſciſſæ $SR = \frac{ma}{m+n}$; erit pariter punctum R centrum virium, quæ vires f (BF) ſunt ut $RB \times \frac{SB^{\frac{2m-r}{r}}}{AB^{\frac{r-2n}{r}}}$.

Si ponatur $m = n$, erit $u^{r} = \overline{ax-xx}^{m}$; & $f = \frac{1}{2}a - x \times \overline{ax-xx}^{\frac{2m-r}{r}}$ (Fig. 35.) ſive, ſi r ſit major quam 2m, $f = \frac{\frac{1}{2}a - x}{\overline{ax-xx}^{\frac{r-2m}{r}}}$ (fig. 36.), ſemperque centrum virium erit punctum R medium rectæ SA.

EXEM-

# EXEMPLUM IV.

§. 131. SIT ſcala velocitatum $u^{m+n} = \frac{bx^m \times \overline{a+x}^n}{a}$: reperietur ut in exemplo ſuperiore vis $f = \overline{\frac{ma}{m+n}+x} \times \frac{x^{\frac{m-n}{m+n}}}{\overline{a+x}^{\frac{m-n}{m+n}}}$: aut (ſi n ſit major quam m) $f = \overline{\frac{ma}{m+n}+x} \times \frac{\overline{a+x}^{\frac{n-m}{m+x}}}{x^{\frac{n-m}{m+n}}}$.

Et ſi $m=n$, erit $f = \frac{1}{2}\overline{a+x}$, ut in hyperbola apolloniana, in qua ſcala virium eſt ejus aſymptoton (§. 38.)

§. 132. Si generalior ponatur æquatio ad ſcalam velocitatum $u^r = x^m \times \overline{a+x}^n$, ſimiliter reperietur ut in ſuperiore exemplo $f = \overline{\frac{ma}{m+n}+x} \times \frac{x^{\frac{2m-r}{r}}}{\overline{a+x}^{\frac{r-2n}{r}}}$: & ſi $m=n$, erit $f = \overline{\frac{1}{2}a+x} \times \overline{ax+xx}^{\frac{2m-r}{r}}$.

Ex-

Exponentes r , m , n , ſumi poſſunt negativi , & maxima ſive minima velocitas reperietur ubi abſciſſa $x = - \frac{ma}{m+n}$. Vide exemplum 3.

---

# EXEMPLUM V.

§. 133. SIT vas cujuſcumque figuræ fluido plenum , quod effluat per foramen S in ejus fundo inſculptum ita ut fluidi ſuprema ſuperficies CD in evacuatione deprimatur & accedat ad fundum S ; cujus ſuperficiei in tali motu velocitas eſt in ratione compoſita ex ſubduplicata altitudinis SA , & ex reciproca ſectionis CD , uti demonſtrat Torricellius in poſtrema prop: de motu aquarum. Quæritur vis centralis qua eadem ſuperficies tendit ad fundum S.

Fig. 37.

§. 134. Ducatur ex fundo S ad fluidi ſuperficiem perpendicularis $SA = x$ , ſectio CD ſit $= yy$ ; ejus velocitas $= u$ ; vis centralis $= f$ .

Erit ergo (§. 133. ) $uu = \frac{x}{y^4}$ : & differentiando $\frac{2udu}{dx}$ $(f) = \frac{y^4 dx - 4xy^3 dy}{y^8 dx} = \frac{1}{y^4} - \frac{4xdy}{y^5 dx}$.
Ex data autem vaſis figura , ſeu ratione ſectionis CD ad ſectionem EE expreſſa quantitatibus conſtantibus & abſciſſa x , habebitur valor quantitatum y , & dy , quibus ſubſtitutis in æquatione $f = \frac{1}{y^4} - \frac{4xdy}{y^5 dx}$ eruitur vis centralis quæſita.

§. 135.

§. 135. Hinc ex tribus, videlicet velocitate, forma vaſis, & vi centrali, uno dato habentur reliqua duo.

Primo. Sit data velocitas exempli cauſſa uu $= x^m$, erit $\frac{x}{y^4}$ (uu) $= x^m$, & $y^4 = x^{1-m}$, quæ eſt vaſis figura: atque vis centralis $f = mx^{m-1}$.

§. 136. Secundo. Sit data forma vaſis exempli cauſſa ſphæra ſeu ſphæroides PCS, cujus diameter SP $= a$, ſitque perforata in imo puncto S, unde effluat fluidum, cujus ſuperficies ſeu ſectio circularis deſcendens CD eſt proportionalis quadrato CA $= yy$, cui quadrato etiam proportionale ſeu æquale eſt rectangulum SA$\times$AP $= x \times \overline{a - x}$: itaque æquatio exprimens datam formam vaſis erit $yy = ax - xx$. Erit ergo uu $= \frac{x}{y^4} = \frac{x}{\overline{ax - xx}^2}$, ſive uu $= \frac{1}{x \times \overline{a - x}^2}$; quæ eſt æquatio §. 130., ſi modo ibi ponantur exponentes $r = 2$, $m = -1$, & $n = -2$: quare ex dictis in eodem §. erit vis centralis f $= \overline{\frac{1}{3}a - x} \times \frac{-1}{x^2 \times \overline{a - x}^3}$, quoties $x$ eſt minor quam $\frac{1}{3}a$; ſive $f = \overline{x - \frac{1}{3}a} \times \frac{1}{x^2 \times \overline{a - x}^3}$ quoties $x$ major eſt quam $\frac{1}{3}a$: in priori caſu vis erit centripeta (§. 117), in ſecundo caſu centrifuga, relata tamen ad centrum vi-

rium S : at ſi accipiatur SR $(x) = \frac{1}{3}$ SP $\left(\frac{1}{3}a\right)$, & vis referatur ad centrum virium R, erit ex utraque parte RP, & RS (ſ. 117.) centrifuga, atque proportionalis $\frac{RA}{SA^2 \times AP^3}$, ſive $\frac{Ra}{Sa^2 \times aP^3}$. Itaque in puncto R vis erit nulla, in utroque vero vertice P, & S infinita; at vis in vertice P ad vim in vertice S habebit proportionem infinitam: nam ſumptis æqualibus PA, Sa, erit $PA \times AS = Sa \times aP$, quare vis in A ad vim in a erit ut $\frac{RA}{AP}$ ad $\frac{Ra}{aP}$: ſi itaque ſumantur puncta A, & a infinite proxima verticibus P & S, erit vis in P ad vim in S ut $\frac{RP}{o}$ ad $\frac{RS}{SP}$, ſive ut $RP \times PS$ ad o, proportio ſcilicet infinita. Scala ergo virium centralium erit curva MRQ duo habens aſymptota PM, SQ, ſed PM infinitum reſpectu infiniti SQ.

Quadratum velocitatis AB ( uu ) eſt reciproce ut $AS \times AP^2$, nam ejus æquationem diximus eſſe $uu = \frac{1}{x \times \overline{a - x}^2}$: ex quo colligitur in utroque vertice P, S, velocitates eſſe infinitas;

tas; ſed ( ubi de viribus dictum eſt ) velocitas in P ad velocitatem in S habebit proportionem infinitam, reperietur enim ut PS ad o. Minima vero velocitas erit in puncto R, nimirum ordinata RH, cujus quadratum eſt reciproce ut quadruplum cubi SR. Scala ergo velocitatum BHb jacebit inter duo aſymptota, quorum PM eſt infinitum reſpectu SN, verticemque habebit in puncto H. Et fluidi ſuperficies CD deſcendet motu retardato a ſummo vertice P uſque ad punctum R per duas diametri tertias partes PR, indeque a puncto R uſque ad foramen in imo vertice S motu accelerato deſcenſum abſolvet. Studioſus lector reperiet ſcalas temporum elementarium & integrorum.

§. 137. Tertio denique ſit data vis centralis, qua fluidi ſuperficies deſcendit, & quæratur vaſis forma. Exempli cauſſa ponatur vis centralis nulla, hoc eſt æquabilis motus quo fluidi ſuperficies deſcendit eadem ſemper velocitate: erit $f = \frac{1}{y^4} - \frac{4xdy}{y^5dx} = o$ (§. 134): quare $\frac{1}{y^4} = \frac{4xdy}{y^5dx}$, & $\frac{dx}{x} = \frac{4dy}{y}$, & integrando $l.x = 4\,l.y$, ſcilicet logarithmus y quadruplus logarithmi x; atque adeo $y^4 = x$, quæ æquatio exprimit vaſis formam. Id variis modis effici poteſt: ſi vas ſit rotundum genitum ex revolutione circa axem SA parabolæ quarti gradus SC, cujus ſcilicet abſciſſæ SB, SA ſint inter ſe ut quadratoquadrata ordinatarum BE, AC; tum enim eædem abſciſſæ erunt in duplicata ratione circulorum ſeu ſuperficierum fluidi EF, CD, quas (§. 134.) poſuimus $= yy$. Fig. 37.

Item ſi vas ſit priſma parabolicum, cujus ſcilicet plana oppoſita verticalia EAF, GBH ſint parabolæ apollonianæ parallelæ; fluidi enim ſuperficies yy erunt rectangula EFHG, efhg, omnia ejusdem altitudinis CD, ſeu cd, ideoque inter ſe ut baſes EF, ef, ſeu ut ordinatæ ad parabolam, ſcilicet in ſubduplicata ratione abſciſſarum AC, Ac, quæ ſunt diſtantiæ x a fundo vaſis.

Fig. 39.

§. 138. Sed facilius reperietur forma vaſis ſi primum per Prop. III. ex data vi centrali reperiatur velocitas; inde enim per dicta (§. 135.) ex velocitate habebitur forma vaſis.

Sit exempli cauſſa vis centralis ut poteſtas $m-1$ diſtantiarum a centro (ut in exemplo 6. §. 99.) hoc eſt altitudinum ſuperficiei fluidi a fundo vaſis, poſito numero m poſitivo vel negativo: eſt ergo $f = x^{m-1}$. In hac vero lege virium variæ poſſunt eſſe ſcalæ velocitatum, ſcilicet $uu = \frac{a^m - x^m}{m}$ (§. 99. & 108.): ſive $uu = \frac{x^m \pm a^m}{m}$ (§. 101. 103. 107.) ſive demum $uu = \frac{x^m}{m}$ (§. 102, 107). Unde quoniam (§ 134) $uu = \frac{x}{y^4}$, ideo in hac lege virium variæ eſſe poſſunt formæ vaſis ſequentibus æquationibus expreſſæ. Primo $y^4 = \frac{mx}{a^m - x^m}$

in

in quo velocitas ſuperficiei fluidi eſt $uu = \frac{a^m - x^m}{m}$. Secundo $y^4 = \frac{mx}{x^m \pm a^m}$, in quo velocitas $uu = \frac{x^m \mp a^m}{m}$. Tertio $y^4 = mx^{1-m}$ in quo velocitas $uu = \frac{x^m}{m}$.

Ut ex hoc generali exemplo ad caſum aliquem particularem deſcendamus, ponatur $m = 1$, adeoque $f = x^{m-1} = x^0 = 1$, ſcilicet vis centralis conſtans, atque adeo motus quo fluidi ſuperficies accedit ad fundum vaſis uniformiter accelleratus vel retardatus uti motus gravium deorſum tendentium, aut ſurſum impulſorum; in hac hypotheſi formæ vaſis ex quo effluit fluidum poſſunt eſſe tres ſive quatuor genitæ ex revolutione circa axem quatuor figurarum quarum æquationes ſunt. Primo $y^4 = \frac{x}{a - x}$, in quo velocitas ſuperficiei fluidi eſt $uu = a - x$. Secundo $y^4 = \frac{x}{x - a}$, in quo velocitas $uu = x - a$. Tertio $y^4 = \frac{x}{x + a}$, in quo velocitas $uu = x + a$. Quarto $y^4 = 1$, in quo velocitas $uu = x$. Priores duæ æquationes dant formam vaſis ut in fig: 40. ubi ScM, & MCN ſunt curvæ deſcriptæ circa communem axem SRA, in quo SR eſt recta conſtans $= a$, Fig. 40.

abſciſſæ Sa, vel SA $=$ x, ordinatæ ac, vel AC $=$ y; æquationes vero ſunt ca$^4$ ($y^4$) $= \frac{Sa}{aR}\left(\frac{x}{a-x}\right)$, & CA$^4$ ($y^4$) $= \frac{SA}{AR}\left(\frac{x}{x-a}\right)$. Punctum S erit vertex curvæ ScM, recta RM aſymptoton commune, & curva McN habebit aliud aſymptoton KN parallelum axi ad diſtantiam RK æqualem unitati, ſeu conſtanti illi quæ in æquatione ſumpta eſt pro unitate. Si ergo circa axem SRA revolvantur curvæ ScMCN dabunt formam vaſis, ex cujus fundo S dum effluit fluidum ejus ſuperficies CA deprimitur motu uniformiter retardato uſque ad punctum R, ubi ſuperficiei in infinitam amplitudinem extenſæ velocitas nulla eſt, ſive infinite parva: ex puncto autem R uſque ad fundum S ſuperficies fluidi ca deſcendet motu uniformiter accelerato: ſcilicet ſcalæ velocitatum erunt parabolæ BR, RH, vertice R deſcriptæ: nam ab$^2$ (uu) $=$ Ra (a $-$ x). Et AB$^2$ (uu) $=$ RA (x $-$ a).

Tertia ex quatuor ſupradictis æquationibus, nimirum $y^4 = \frac{x}{a+x}$ dat formam vaſis uti in fig. 41. genitum ex revolutione circa axem SA curvæ ScC, cujus æquatio AC$^4$ ($y^4$) $\frac{SA}{AR}\left(\frac{x}{a+x}\right)$ Fig. 41.

poſitis nimirum iiſdem ut ſupra denominationibus SR $=$ a, SA $=$ x, AC $=$ y. Fluidi igitur effluentis ex foramine S ſuperficies CA deſcendet motu uniformiter retardato uſque ad fundum S, ubi velocitas ultimæ fluidi guttæ erit SH ordinata ad ſcalam velocitatum BH, quæ

quæ eſt parabola RHB deſcripta vertice R : ſiquidem $AB^2$ ( uu ) = AR ( a + x ).

Quarta demum æquatio $y^4 = 1$, hoc eſt ſuperficies fluidi yy conſtans dabit formam vaſis ut in fig: 42. cylindrum CKED genitum ex revolutione circa latus SA rectanguli CKSA ; ex quo ( ut notum eſt ) dum effluit fluidum ex foramine S, ejus ſuperficies CD deprimitur motu uniformiter retardato, nullaque ultimæ effluenti guttæ velocitas remanebit: ſcala quippe velocitatum eſt parabola SB vertice S deſcripta. Fig. 42.

---

# PROPOSITIO V.

## PROBLEMA.

*In corporis motu rectilineo data ſcala temporum integrorum ab initio motus, velocitates & vires centrales analytice invenire.*

§. 139. Moveatur corpus per AB, ſitque data ſcala temporum ab initio motus in puncto A, quæritur ſcala velocitatum GC, & virium HF. Solutionem dedimus §. 115. ſcilicet.

Sit ſpatii percuſſi pars infinite parva Bb = dx, & quoniam data ſunt tempora per AB, Ab, data erit differentia eorum temporum infinite parva, nempe tempus elementare dt, quo percurritur ſpatiolum Bb = dx, percurritur autem velocitate BC = u, quam corpus lapſum per AB habet in puncto B; eſtque velocitas directe ut ſpatium & reciproce ut tempus (§. 6.), nimi-

rum $u = \frac{dx}{dt}$. In hac ergo æquatione loco dt ſubſtituendus eſt ejus valor datus quantitatibus x, & dx expreſſus, habebiturque in terminis finitis valor velocitatis u, ſeu æquatio ad quæſitam ſcalam velocitatis.

§. 140. Inventa ſcala velocitatum invenietur ex præcedenti problemate ſcala virium centralium, nam (§ 116.) $f = \frac{udu}{dx}$. Sed inveniri etiam poteſt ſcala virium immediate ex data ſcala temporum. Sint enim ſpatii partes duo infinite parvæ eodem tempore dt percuſſæ Bb, ba, altera quidem velocitate BC = u, altera vero velocitate aucta, vel diminuta bc = u ∓ du. Et quoniam tempora ponuntur æqualia; erunt ſpatia Bb, ba, ut velocitates BC, bc; adeoque ſpatiolum ba erit auctum vel diminutum quantitate infinite parva reſpectu ſpatii Bb (dx), hoc eſt erit ba = dx ± ddx: eritque BC (u). bc(u ± du) :: Bb(dx). ba (dx ± ddx): & udx ± uddx = udx ± dudx; atque adeo uddx = dudx; & multiplicando per $\frac{u}{dx^2}$, erit $\frac{uuddx}{dx^2} = \frac{udu}{dx} = f$ (§. 116.): eſt autem [§. 139.] $dt = \frac{dx}{u}$, & $dt^2 = \frac{dx^2}{uu}$, adeoque $\frac{ddx}{dt^2} = \frac{uuddx}{dx^2}$; ergo vis centralis $f = \frac{ddx}{dt^2}$.

Data

Data ergo æquatio ad ſcalam temporum integrorum differentianda erit, iterumque accipienda ſecunda differentia ſpatii percuſſi $ddx$ poſita conſtanti prima differentia temporis $dt$.

§. 141. Quoniam in adductis formulis $u = \frac{dx}{dt}$, & $f = \frac{ddx}{dt^2}$ tempus integrum datum $t$ non reperitur, ſed tantum ejus differentia $dt$, & $ddt$, ideo ſcalæ velocitatum & virium geometrice haberi poſſunt etiamſi tempora data ſint ut arcus curvarum, vel ut areæ curvilineæ, quarum rectificatio vel quadratura geometrice haberi nequeat.

Sit quælibet curva AGC, cujus abſciſſæ AB, vel DB $= x$, ordinatæ BC $= y$: moveatur corpus per axem AB, & tempora data ſint ut arcus ab initio motus AC $= t$, erit $dt = Cc = \sqrt{Cm^2 + mc^2} = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, adeoque $uu = \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{dx^2}{dx^2 + dy^2}$, ubi pro $dy^2$ ſubſtituto ejus valore, qui reperietur ex data æquatione ad curvam AC, habebitur valor velocitatis $u$ in terminis finitis. Reperta autem velocitate reperietur vis centralis ex ſupradictis, vel ſi uti lubeat formula $f = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{ddx}{dx^2 + dy^2}$ advertatur oportet in invenienda ſecunda differentia $ddx$ ex data æquatione ad curvam AC, ſummam quadratorum $dx^2 + dy^2$ ſumendam eſſe pro conſtanti; ejus nimirum differentiam æquandam eſſe nihilo. Fig. 31.

§. 142.

§. 142. Quod ſi data tempora ſint ut areæ ABC, erit differentia, hoc eſt tempus elementare $dt = BC \times Bb\ (ydx)$, adeoque u $= \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y}$ (§. 8.) Item quoniam differentia dt ( ydx ) ponitur conſtans, erit $dydx + yddx = 0$, & $ddx = \frac{-dydy}{y}$, adeoque $\frac{ddx}{dt^2}$ (f) $= \frac{-dy}{y^3 dx}$.

Fig. 43. §. 143. Demum poſito ut ſupra AB = x, BC = y dum corpus movetur per axem AB ſint tempora ut areæ CAG, comprehenſæ arcu datæ curvæ GC, & ramis a puncto A ductis: erit dt ut area CAc ( poſito nimirum arcu infinite parvo Cc, & Cm = dx, cm = dy ) ducta vero tangente CN, quæ ſecet axem in N, & ex dato puncto A normali AP ſuper tangente, & AR ordinatis parallela: erit ſubtangens $BN = \frac{ydx}{dy}$, & $AN = BN - BA = \frac{ydx}{dy} - x = \frac{ydx - xdy}{dy}$. Eſt autem triangulum Cmc ſimile triangulis NAR, RAP; adeoque Cm ( dx ). mc ( dy ) : : AN $\left(\frac{ydx - xdy}{dy}\right)$. $AR = \frac{ydx - xdy}{dx}$: itemque Cc $\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right)$. Cm ( dx ) : : AR $\left(\frac{ydx - xdy}{dx}\right)$. $AP = \frac{ydx - xdy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$: Igitur Cc × AP, hoc eſt duplum areæ CAc, ſeu tempus dt

ydx

$= ydx - xdy$. Erit ergo velocitas $u = \frac{dx}{dt} =$

$\frac{dx}{ydx - xdy}$; & $f = \frac{ddx}{dt^2} = \frac{ddx}{\overline{ydx - xdy}^2}$.

---

# EXEMPLUM I.

§. 144. SIT ſcala temporum $x = t^m$, erit velocitas $u \left(\frac{dx}{dt}\right) = mt^{m-1} = mx^{\frac{m-1}{m}}$.

Et facto $dt$ conſtanti erit vis centralis $f \left(\frac{ddx}{dt^2}\right)$

$= \overline{mm - m}\, x^{\frac{m-2}{m}}$. Vide §. 102.

Si $m = 1$, erit $t = x$, velocitas conſtans, & vis centralis nulla, ſcilicet motus æquabilis.

Si $m = 2$, erit $t^2 = x$, $u^2 = x$, & $f = 2x^0 = 1$. ſcilicet motus uniformiter acceleratus.

Si $m = \frac{2}{3}$, erit $t^2 = x^3$, $u^2 = \frac{1}{x}$, & $f =$

$\frac{-1}{xx}$. Vide §. 59.

Si $m = \frac{1}{2}$, erit $t = xx$; $u = \frac{1}{x}$, & $f =$

$\frac{-1}{x^3}$. Vide §. 83.

§. 145. Sit $a^2 - x^2 = tt$: reperietur $u \left(\frac{dx}{dt}\right)$

$=$

$= \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$; & $f = \frac{a^2}{x^3}$: vide §. 78. Si vero ſit $x^2 \pm a^2 = tt$: reperietur $u = \frac{\sqrt{xx \pm aa}}{x}$, & $f = \mp \frac{aa}{x^3}$: vide §. 89, & 93.

---

# EXEMPLUM II.

§. 146. SIT curva $x = y^m$, & dum corpus movetur per abſciſſam $x$, ſit tempus ut arcus curvæ ordinatis $y$ interceptus: reperietur (§. 141) $uu = \frac{mm}{mm + x^{\frac{2-2m}{m}}}$, & $f = \frac{mm - m \times x^{\frac{m-2}{m}}}{mmx^{\frac{2m-2}{m}+1}}$

Sit $m = 1$, ſcilicet $x = y$, ideoque tempus proportionale ſpatio percurſo; velocitas $u$ erit conſtans, & vis centralis nulla; ſcilicet motus æquabilis.

Sit $m = 2$, hoc eſt $x = yy$, tempora ſcilicet ut arcus parabolæ dum corpus movetur per ejus axem: velocitates erunt $uu = \frac{x}{x + \frac{1}{4}}$;

vires

vires autem $f = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{4}\right)^2}$, nimirum reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro, centrum vero diſtabit a vertice parabolæ quarta parametri parte; vide §. 71.

Sit $m = \frac{2}{3}$, ſcilicet parabola cubica $x^3 = y^2$, in qua dum corpus movetur per abſciſſas $x$, tempora ſint ut reſpondentes arcus parabolæ: erit $uu = \frac{\frac{4}{9}}{\frac{4}{9} + x}$, hoc eſt quadrata velocitatum reciproce ut diſtantiæ a puncto, quod diſtat a vertice parabolæ $\frac{4}{9}$ parametri, adeoque in ipſo vertice parabolæ, ubi $x = 0$, erit velocitas $u = 1$, nimirum æqualis parametro: vires autem $f = \frac{\frac{2}{9}}{\left(\frac{4}{9} + x\right)^2}$; ſcilicet reciproce ut quadrata diſtantiarum a centro, quod centrum erit punctum illud diſtans a vertice parabolæ $\frac{4}{9}$ parametri: vide §. 59. & tertium caſum exempli præcedentis; idem enim eſt caſus cum hac differentia quod ibi computabantur tempora deſcenſus corporis uſque ad centrum virium, hic vero uſque ad datam a centro diſtantiam.

EXEM-

# EXEMPLUM III.

§. 146. SIT curva $x = y^m$, & dum corpus movetur per abſciſſam $x$, ſit tempus ut area comprehenſa arcu datæ curvæ, & radiis ab origine abſciſſarum $x$ ductis: reperietur (§. 143.) $u \left(\frac{dx}{ydx - xdy}\right) = \frac{m}{\overline{m-1}\, x^m}$; & $f = \frac{-m}{\overline{m-1}^2\, x^{2\frac{m+2}{m}}}$.

Sit $m = -2$, hoc eſt curva data ſit hyperbola $xy^2 = 1$, facile eſt demonſtrare, radios ductos a centro ad extremitates ordinatarum $y$ abſcindere areas aſymptoticas, quæ inter ſe ſunt in ſubduplicata ratione abſciſſarum $x$, erit nimirum $tt = x$: reperietur vero $uu = x$, & vis $f$ conſtans; ſcilicet motus erit uniformiter acceleratus.

Sit $m = -1$, hoc eſt curva data ſit hyperbola $xy = 1$, erit $u = x$, & $f = x$: vide fig. 13. §. 44. ubi in hac virium centrifugarum hypotheſi demonſtratum eſt dum corpus movetur ex quiete in centro virium S velocitatem in quolibet puncto A eſſe ut diſtantia a centro SA; & tempus per quamlibet ſpatii partem AC eſſe ut area hyperbolica AHFC: hæc porro area (§. 43.) æqualis eſt trilineo HSF, quod hic ſupponitur proportionale tempori per AC.

Sit $m = 2$, hoc eſt curva data ſit parabola $x = yy$, erit $uu = \frac{1}{x}$, & $f = \frac{-1}{xx}$; vide

fig.

fig. 21. ſ. 59. & 64, ubi in hac virium centripetarum hypotheſi demonſtratum eſt corporis ex infinita diſtantia cadentis ad centrum S tempora per MS, BS proportionalia eſſe areis parabolicis RMS, GBS: at iſtæ areæ (ut patet ex quadratura parabolæ) ſunt inter ſe ut bilinea SRZ, SGZ comprehenſa ramis a vertice S ductis & curva parabolica, quibus bilineis hic ſupponitur proportionalia eſſe tempora per MS, BS. Conferri poſſunt quæ generaliter dicta ſunt ſ. 102. & 107.

ſ. 147. Sit æquatio ad circulum $a^2 - x^2 = y^2$, ſive æquatio ad hyperbolam $x^2 \pm a^2 = y^2$, & dum corpus movetur per abſciſſam x ſit tempus ut area comprehenſa arcu circuli vel hyperbolæ, & radiis a centro ductis ad extremitates ordinatarum y: reperietur in utroque caſu (§. 143.) $u \left( \frac{dx}{ydx - xdy} \right) = y$, hoc eſt in circulo $uu = aa - xx$, & in hyperbola $uu = xx \pm aa$; & $f = \mp x$, ſcilicet in circulo vis eſt centripeta, in hyperbola vero centrifuga, quemadmodum §. 26. & ſequent. in hac virium hypotheſi demonſtratum eſt.

ſ. 148. Sit item æquatio ad circulum $ax - xx = yy$, ſive ad hyperbolam $xx \pm ax = yy$, ſumendo initium abſciſſarum ab alterutra diametri extremitate; & dum corpus movetur per diametrum ſit tempus ut area comprehenſa arcu circulari, vel hyperbolico & radiis ab illa extremitate ductis: reperietur in utroque caſu (§. 143.) $uu \left( \frac{dx}{ydx - xdy} \right) = \frac{yy}{xx}$, hoc eſt

in circulo $uu = \frac{a - x}{x}$, & in hyperbola $uu = \frac{x \pm a}{x}$: & in circulo atque in primo caſu hyperbolæ vis centripeta $f = \frac{-a}{xx}$, in ſecundo autem caſu hyperbolæ vis centrifuga $f = \frac{a}{xx}$: quemadmodum in hac virium centralium hypotheſi demonſtratum eſt §. 48. & ſequentibus.

LIBER

# LIBER SECUNDUS.

## De motu corporum curvilineo in mediis non reſiſtentibus.

§. 149. SIT vis qualibet centralis cujus centrum S, & corpus in loco quolibet A (quod punctum projectionis voco) velocitate ei per impulſum communicata, aut lapſu ex qualibet ſublimitate RA acquiſita, conetur moveri ſecundum directionem AF, quæ cum vi centrali AS efficiat angulum quemcumque aſſignabilem SAF: Patet corpus ex puncto A moveri motu compoſito ex impreſſo juxta directionem AF & ex centrali juxta directionem AS, ita ut eo tempore quo ſingulis illis motibus deſcriberet ſpatia exempli cauſſa AF, AG, motu ex utroque compoſito deſcribat diagonalem AB parallelogrammi AFBG. Item ſecundo temporis inſtanti ſi vis centralis ceſſaret corpus moveri pergeret per BH eadem celeritate ac directione diagonalis AB; at vis centralis, quæ agit indeſinenter, trahat corpus ex puncto B juxta directionem BS per lineolam BK eo tempore, quo illo alio motu, ac directione deſcriberet BH; motu itaque ex utroque compoſito deſcribet eo tempore diagonalem BC parallelogrammi BHCK: & ita porro. Hujuſmodi autem diagonales AB, BC, CD, DE &c. (quoniam vis centralis agit indeſinenter) ſunt latera infinite parva curvæ ABCDE, quæ motu illo compoſito deſcribitur; & directiones AF, BH &c. ſunt tangentes illius curvæ. Itaque motus compoſitus ex quali- Fig. 44.

bet vi centrali, & impulſu tranſverſo ad centralem directionem, erit ſemper motus curvilineus.

§. 150. Viceverſa motus curvilineus in quolibet curvæ puncto compoſitus eſt ex motu tangentiali, & ex motu centrali. Corpus enim ſemel in motu poſitum moveri pergit uniformiter in directum niſi ab alia vi cogatur directionem mutare: quare ſi non per rectam lineam ſed per curvam moveatur, neceſſe eſt impellatur indeſinenter ab alia vi, quæ ipſum a directa ſua per tangentem directione deturbet, quæ vis ſi ſemel ceſſaret corpus illud per curvæ tangentem uniformi motu progrederetur ea celeritate quam in eo in quo reperitur curvæ puncto haberet: quemadmodum contra ſi motus tangentialis ceſſaret, vis illa quæ indeſinenter agit urgeret corpus ad certam partem, hoc eſt ad punctum illud ubi directiones centrales infinite proximæ conveniunt.

§. 151. Porro tametſi motus quilibet compoſitus reſolvi poſſit in varios & multiplices motus componentes: hic tamen primum conſiderabimus motum curvilineum ex duplici tantum motu compoſitum, ex motu videlicet ut diximus §. 149. centrali dato, & ex impreſſo juxta datam directionem tranſverſalem, vel (quod idem eſt) ut §. 150. ex motu impreſſo juxta directionem tangentis datæ curvæ, & ex motu centrali. In primo caſu §. 149. ponuntur dati motus componentes centralis & tranſverſalis, & quæritur motus compoſitus curvilineus qui inde reſultat; in ſecundo caſu §. 150. datus ponitur motus compoſitus curvilineus, & quæruntur motus componentes.

Ex hac motus curvilinei theoria ſequentia corollaria colliguntur.

§. 152. Coroll. 1. Curvæ quæ viribus centripetis

tis deſcribuntur concavitatem, quæ vero viribus centrifugis convexitatem verſus centrum virium vertunt.

Id ex ipſa figuræ inſpectione patet, in qua S eſt centrum virium, T punctum projectionis ſeu locus in quo corpus impellitur ſecundum directionem tangentis TA: ſiquidem poſtquam partem tangentis, ſeu latus curvæ infinite parvum TA corpus deſcripſit, ſi nulla vi centrali urgeretur per ipſam tangentem TAF pergeret; ſed ſi vi centripeta verſus centrum trahitur per AG, ſeu FB, deſcribit motu compoſito latus curvæ AB, quod cum latere AT angulum TAB facit verſus centrum S: quod ſi vi centrifuga a centro S repellitur per Ag, ſeu Fb, tum latus quod deſcribit Ab cum latere AT angulum TAb facit verſus contrarias partes, idemque demonſtrabitur de reliquis curvarum TAB, TAb laterculis. Quare &c. Fig. 45.

Ex quo fit ut ſi curva habeat punctum inflexionis, ſeu contrarii flexus, in eo puncto vis centralis fit nulla, ibi enim tangens oſculatur & ſecat ſimul curvam, adeoque idem elementum, quod commune eſt curvæ & tangenti, ſola vi tangentiali deſcribitur nulla centrali: Itaque in parte curvæ concava verſus centrum vis erit centripeta, quæ ſenſim minuitur accedendo ad punctum contrarii flexus, ubi nulla evadit, indeque in parte convexa convertitur in vim centrifugam. Quod ſi ex virium centro duci poſſit recta tangens curvam in aliquo puncto, erit in eo puncto vis centralis infinita, quippe quæ infinitam proportionem habebit ad vim impreſſam quæ ſupponitur finita.

§. 153. Coroll. 2. In quolibet motu curvilineo dato centrum virium ſeu punctum in quo reſidere ponitur vis qua corpus a motu rectilineo retrahitur & in orbita continetur, eſt illud cir-

ea quod radii a corpore ad ipſum ducti deſcribunt areas temporibus proportionales, ita ut æquabilis arearum deſcriptio index ſit centri quod reſpicit vis qua corpus trahitur. Et viceverſa circa quodlibet datum centrum virium dum corpus movetur deſcribit radiis ad ipſum ductis areas temporibus proportionales.

Fig. 44. Patet ex dictis; nam curvæ elementum infinite parvum BC ſumendum eſt uti recta diagonalis parallelogrammi BHCK, cujus latus BK eſt ſpatium percurſum vi centrali eodem tempore quo latus alterum BH percurritur vi tangentiali, ſeu velocitate qua percurſa eſt præcedens curvæ particula AB: atque adeo tempora quibus AB, BH percurruntur ſunt ut ipſæ rectæ AB, BH, ſeu ut triangula æque alta ASB, BSH, eſt autem BSH æquale triangulo BSC inter eaſdem parallelas SB, CH conſtituto: quare tempora, quibus curvæ latercula AB, BC percurruntur ſunt ut triangula ASB, BSC: idemque demonſtrabitur de reliquis laterculis CD, DE &c. quæ percurruntur temporibus proportionalibus triangulis CSD, DSE &c. ideoque ſumma illorum temporum, hoc eſt tempus per quemlibet curvæ arcum AE eſt proportionale ſummæ triangulorum, hoc eſt areæ ASE deſcriptæ radio a corpore ad centrum virium ducto.

§. 154. Hæc eſt celebris Prop. prima Operis Nevvtoniani Princ. math. Philoſ. nat. ex qua etiam colligitur quod ſi areæ circa punctum aliquod deſcriptæ non ſint temporibus proportionales punctum illud non eſt centrum virium, ſed centrum ſeu directio virium declinat in conſequentia, hoc eſt verſus partes in quas ſit motus ſi modo arearum deſcriptio acceleretur, ſcilicet ſi æqualibus temporibus poſterior area deſcripta major ſit præcedenti; ſin retardetur declinat in antecedentia. Nam primo temporis

mo-

momento percurratur laterculum AB, ſecundo æquali temporis momento percurretur BH æqualis ipſi AB, ſi itaque hoc ſecundo tempore percurratur laterculum BC; erit juncta HC vis centralis, ejuſque centrum reperietur in recta ducta ex puncto B parallela ad HC: quare ſi punctum S tale ſit ut area ſeu triangulum CSB majus ſit triangulo BSA, ſeu triangulo ſuper æquali baſi & æque alto HSB, recta BS non erit parallela ad CH, ſed cum ea conveniet ad partes B, H; ſi vero triangulum CSB minus ſit BSA ſeu BSH, rectæ HC, BS convenient ad partes C, S: ergo in primo caſu centrum virium eſt in conſequentia ad punctum S, in ſecundo caſu in antecedentia.

§. 155. Coroll. 3. velocitates abſolutæ in quibuslibet curvæ punctis A, D ſunt inter ſe reciproce ut normales ductæ ex centro virium S ſuper tangentibus curvam in iiſdem punctis D, A. Fig. 44. vel 45.

Nam velocitates in A & D ſunt inter ſe ut curvæ partes infinite parvæ AB, DE æquali tempore percurſæ; tempora vero ex præcedenti corollario ſunt æqualia quoties æquales ſunt areæ ſeu triangula ASB, DSE, atque adeo AB ad DE reciproce ut normalis ducta ex centro S ſuper DE, ſcilicet ſuper tangente in puncto D, ad normalem ductam ex eodem centro S ſuper AB, ſcilicet ſuper tangente in puncto A.

§. 156. Coroll. 4. Curva eadem AD nonniſi unica lege virium centralium tendentium ad idem punctum S deſcribi poteſt.

Sint enim areæ quælibet infinite parvæ æquales ASB, DSE, & ex punctis B, E ducantur ad SA, SD parallelæ BF, EP, quæ tangentibus in A, D occurrant in F, P. Et quoniam areæ ASB, DSE æquales ponuntur (§. 153.) curvæ partes AB, DE æquali tempore percurrentur, hoc vero tempore vis centralis in A trahit corpus per Fig. 45.

 lineo-

lineolam naſcentem FB, & vis in D trahit corpus per PE: quare vires in A, D ſunt ut lineolæ BF, EP eodem tempore deſcriptæ. Sit ergo, ſi fieri poteſt, in alia lege virium centralium tendentium ad idem punctum S, vis in A ad vim in D ut BF ad aliam XZ, quæ eidem SD parallela ponatur inter curvam DX & tangentem DZ: corpora igitur in A, D trahentur vi centrali in S eodem tempore per lineolas FB, ZX; adeoque partes curvæ AB, DX eodem tempore percurrentur, atque adeo (§. 153.) areæ ASB, DSX erunt æquales: æquales autem poſitæ ſunt ASB, DSE: ergo DSE, DSX æquales erunt: ergo SX, SE congruent inter ſe; itemque XZ, EP, ambo enim parallelæ ſunt ad SD: non ergo XZ diverſa eſt ab EP: ergo &c.

Si curva AD ſit circulus cujus centrum S, erit SA = SD, & BF = EP: in quocumque ergo circuli puncto vis centralis eadem eſt tendens ad centrum circuli: eadem vero eſt quæcumque ſit lex virium centralium; nam licet in diverſis a centro virium diſtantiis diverſa eſſe poſſit in quacumque ratione, in eadem tamen diſtantia eadem ſemper eſt: circulus ergo deſcribi poteſt in quacumque virium centripetarum lege, & in quacumque a centro virium diſtantia.

§. 157. Coroll. 5. Eadem vi centrali deſcribi nequeunt duo orbes diverſi a corpore ex eodem loco ſecundum eamdem directionem cum eadem celeritate exeunte.

Fig. 44. Vires centrales in quibuslibet diſtantiis SA, SB, SC &c. ſint inter ſe ut lineolæ naſcentes AG, BK, CN &c. & corpus exeat ex puncto A ſecundum directionem AF cum ea velocitate tangentiali ut eo tempore quo vi centrali impellitur per AG deſcribere valeat partem AF: quare ex datis poſitione & magnitudine AG,

AF

AF datur in parallelogrammo FG diagonalis AB quam corpus motu compoſito tempore illo deſcribit. In puncto autem B dantur ( producta AB uſque ad BH = AB ) ſpatia BK, BH, quæ a corpore vi centrali & vi tangentiali eodem tempore peraguntur; quare datur diagonalis BC, quam motu compoſito corpus percurret: atque ita porro. Diagonales vero AB, BC, CD &c. quæ hoc modo dantur magnitudine & poſitione, ſunt elementa infinite parva curvæ quam corpus deſcribit. Datur ergo curva ex data vi centrali, directione, & velocitate tangentiali corpori in dato loco impreſſa, neque alia curva præter hanc unam deſcribi poteſt.

§. 158. Coroll. 6. Viciſſim ex data curva & vi centrali tendente ad datum punctum, datur in quolibet curvæ puncto velocitas tangentialis. Si enim data ſit curva ABE data erit in quolibet ejus puncto B tangens ſeu directio motus tangentialis BH: poſito ergo quod in eodem puncto B data ſit etiam quantitas & directio vis centralis BK, dabitur in parallelogrammo HK latus alterum BH quo exprimitur velocitas tangentialis.

§. 159. Coroll. 7. Item data vi centrali & curva quam corpus deſcribit, dabitur tempus periodicum. Siquidem datur (§. 158.) velocitas per quodcumque elementum curvæ infinite parvum BC, ergo dabitur etiam tempus, quod eſt directe ut elementum ipſum, & reciproce ut velocitas, atque adeo datur ſumma temporum ſeu tempus periodium.

§. 160. Coroll. 8. Curvæ duo ſe oſculantes eadem vi centrali deſcribi nequeunt. Se oſculantes enim curvæ ſunt quæ elementa ſeu latera duo AB, BC habent communia: quare poſtquam percurſum eſt latus AB, ut percurri poſſit etiam BC, quoniam in utraque curva eadem eſt

vis centralis BK, eadem etiam ſit oportet velocitas tangentialis BH: ergo (§. 157.) non plures quam una curva deſcribi poſſunt.

## SCHOLION.

§. 161. Patet ex dictis, curvas quæ circa centrum aliquod virium deſcribuntur poſſe eſſe diverſas vel ſpecie, vel magnitudine, vel ſaltem poſitione. 1. pro diverſa lege qua vires centrales in variis a centro diſtantiis augentur vel minuuntur. 2. pro varia a centro diſtantia puncti projectionis, ubi corpus tranſverſe ab externa vi impellitur. 3. pro varia hujus impulſus tranſverſalis quantitate, ejuſque proportione ad vim centralem in ea diſtantia. 4. demum pro varia ejuſdem impulſus tranſverſalis directione, ſeu vario angulo quem directio projectionis tranſverſalis facit cum directione centrali.

Patet etiam eamdem curvam deſcribi poſſe diverſa virium centralium lege ſi ad diverſa puncta ſeu centra vires tendere ſupponantur.

Quomodo vero aut datis curvis vires centrales reperiantur, aut datis viribus centralibus reperiantur curvæ ſequentibus propoſitionibus docebitur.

PRO-

# PROPOSITIO I.

## PROBLEMA.

*Volvatur corpus in orbe quocumque dato: quæritur lex vis centralis tendentis ad punctum quodcumque datum.*

§. 162. SIT orbis ſeu curva data AD quam corpus deſcribit viribus centralibus ad datum punctum S tendentibus: quæritur ratio virium centralium in duobus quibuſcumque curvæ punctis A, D, ſeu in duabus quibuſvis a centro diſtantiis SA, SD. Fig. 45.

Tangant curvam in punctis A, D rectæ AF, DP, & dum corpus vi tangentiali percurrit tangentis particulam infinite parvam AF vis centralis ipſum trahat per lineolam naſcentem AG ſeu FB, ita ut eodem tempore motu tangentiali percurrat AF, motu centrali FB, & motu ex utroque compoſito elementum curvæ AB. Porro cum puncta A, B ſint infinite proxima, differentia diſtantiarum a centro SA, SB erit infinite parva, atque adeo infinite parva erit etiam differentia virium centralium in diſtantiis illis ſeu in punctis A, B, ita ut vires centrales ſeu acceleratrices quibus corpus impellitur dum ſpatiolum AG, ſeu FB deſcribit ſumi poſſint pro æqualibus ſeu pro eadem vi conſtanti, pro ea ſcilicet quæ diſtantiæ a centro SA ſeu SB convenit: idemque dicendum de ſpatiolo PE, ipſum nempe eo tempore quo deſcribitur curvæ elementum DE percurri a corpore impulſo eadem vi centrali conſtanti quæ reſpondet diſtantiæ a centro SD, ſeu SE. Igitur ex demonſtratis §. 22. vires centrales in punctis A, D ſunt

ſunt in ratione compoſita ex directa ſpatiorum percurſorum FB, PE, & ex reciproca duplicata temporum quibus ipſa ſpatia PE, FB percurruntur, ſeu temporum quibus deſcribuntur elementa curvæ DE, AB: hujuſmodi vero tempora ſunt (§. 153.) ut areæ DSE, ASB: vires ergo centrales in punctis, A, D ſunt directe ut lineolæ naſcentes FB, PE, & reciproce ut quadrata arearum DSE, ASB.

Fig. 46. §. 163. Quoniam nobiliſſimum hoc problema fundamentum eſt doctrinæ motus centralis curvilinei, placet majoris claritatis gratia aliam adductæ ſolutionis demonſtrationem afferre ex dictis a nobis de motu rectilineo deſumptam. (*Aliam demonſtrationem vide infra* §. 179.)

Duo quælibet elementa curvæ infinite parva AB, BC æquali tempore infinite parvo, dt percurrantur, junctiſque rectis SA, SB, SC, deſcribantur centro S per puncta B, C arcus circulares BM, CN, qui ſecent rectam SA in punctis M, N: patet ipſo motus initio in puncto A rectas SC, SB, SA coincidere, & parallelas eſſe inter ſe, arcus vero MB, NC coincidere cum rectis ad AS, ſeu BS perpendicularibus: motum vero per AB reſolvi poſſe in duos motus componentes AM, MB, quorum primus AM eſt motus rectilineus centralis, alter vero MB eſt motus ad directionem centralem perpendicularis (nam angulus AMB eſt rectus), proindeque motum centralem neque impedit neque adjuvat. Similiter motus per elementum BC reſolvitur in motum centralem rectilineum BD ſeu MN, & in motum centrali directioni perpendicularem DC. Porro elementum AB producatur in H, eritque AH tangens, cui occurrat SC producta in H, ex quo puncto deſcribatur centro S arcus HEF, eruntque CH, DB parallelæ (ut ſupra dictum eſt, cum angulus

BSH

BSH ſit infinite parvus) ideoque triangula ſuper eadem baſi, & inter eaſdem parallelas BSH, BSC æqualia; ſunt vero (§. 153.) æqualia triangula BSC, BSA, ſiquidem ex ſuppoſitione curvæ elementa AB, BC æquali tempore percurruntur: ergo triangula ASB, BSH æqualia ſunt, eruntque baſes AB, BH æquales; atque adeo in ſimilibus triangulis AMB, BEH latus AM æqualis lateri BE ſeu MF. Si igitur radii SA, SB, SC ponantur $=$ r, erit differentia AM ſeu BD $=$ dr, & ſecunda differentia BD $-$ AM $=$ DE $=$ CH $=$ NF $=$ ddr. Quibus poſitis cum in motu curvilineo ABC motus centralis rectilineus ſit AMN, cumque ſpatiola AM, MN æquali tempore percurrantur, tempore nimirum dt, quo percurruntur curvæ elementa AB, BC; erit ex demonſtratis §. 140. vis centralis $f = \frac{ddr}{dt^2}$, ſcilicet directe ut FN ſeu CH, & reciproce ut quadratum temporis quo deſcribitur AM, vel MN, hoc eſt temporis quo deſcribitur curvæ elementum AB, vel BC, quod tempus eſt proportionale areæ BSC: eſt ergo vis centralis directe ut CH, & reciproce ut quadratum areæ BSC. Q. E. D.

§. 164. Ducta ex puncto B ad AS perpendiculari BM, & ex centro S ad tangentem ABD perpendiculari SD, triangulum ASB erit dimidium rectanguli AS×BM, aut AB×SD; quare vis centralis eſt vel ut $\frac{BF}{AS^2 \times BM^2}$, vel ut $\frac{BF}{AB^2 \times SD^2}$. Fig. 47. 48. 49.

§. 165. Sit ABR circulus oſculans ſeu æquicurvus in puncto A, & AE ejus chorda ducta

ex

ex A per centrum virium S , jungaturque EB; erunt (ob GB parallelam tangenti AF) ſimilia triangula EBA , GBA ; atque adeo EA : AB :: AB . AG $= BF = \frac{AB^2}{AE}$ : quare $\frac{BF}{AB^2 \times SD^2} = \frac{1}{AE \times SD^2}$ : vis ergo in puncto curvæ A eſt reciproce ut chorda circuli oſculantis per centrum virium tranſiens ducta in quadratum perpendiculi a centro virium ad tangentem.

§. *166.* Sit AR diameter circuli oſculantis ; jungaturque RE ; eritque (ob ſimilia triangula rectangula ASP , RAE ) SA : SP :: AR : AE $= \frac{SP \times AR}{SA}$ : quare $\frac{1}{AE \times SP^2} = \frac{SA}{AR \times SP^3}$ ; ſcilicet vis centralis directe ut diſtantia SA a centro virium & reciproce ut radius oſculi AC (quod eſt dimidium diametri AR ) in cubum perpendiculi SP.

Pulcherrimum eſſe ait hoc theorema Jo: Bernoullius in Ephem. Regiæ Acad. Paris an. 1710. & in actis Erudit. lypſiæ 1713. menſis Martii; quod in terminis finitis exhibeat legem vis centripetæ. Nos vero oſtendimus quam facile colligatur ex ſecunda Nevvtoni formula §. 165; quæ & ipſa terminis finitis expreſſa eſt. Verum cum utraque hæc formula radium aut chordam circuli oſculantis includat, parum refert finitis ne an infinite parvis quantitatibus contineatur, quandoquidem ad inventionem radii oſculi non perveniatur niſi per quantitates infinite parvas: quinimo cum ultima hæc formula contineatur radio oſculi AC, perpendiculari SP, & altitudine SA , prolixior nonnumquam evadit calculus: quare viſum eſt aliam formulam ad-

addere, quæ ſola altitudine SA, & perpendiculo SP, earumque differentiis continetur: eam vero ex dictis colligam hac ratione.

§. 167. Ductis ex puncto B tangente BD, chorda per centrum virium BSH, & diametro circuli oſculantis BQ; ſit AM differentia altitudinum AS, BS; & PN differentia perpendiculorum SP, SD; eritque ex dictis §. 165. $EA \times AS = RA \times SP$; ſimiliterque $HB \times BS = QB \times SD = RA \times SD$; quare $RA \times SP - RA \times SD$ ($= RA \times PN$) $= EA \times AS - HB \times BS =$ (ob æqualia rectangula $ES \times SA$, $HS \times SB$) differentiæ quadratorum $SA^2$, $SB^2$, ſeu $SA^2$, $SM^2$; hæc autem differentia æquatur $2SM \times MA + MA^2$, ſeu (ob AM infinite parvam) $2SA \times AM$: ergo $RA \times PN = 2SA \times AM$, ſive $CA \times PN = SA \times AM$;

adeoque $\frac{SA}{AC} = \frac{PN}{AM}$, & $\frac{SA}{AC \times SP^3}$ (quæ eſt formula §. 166) $= \frac{PN}{AM \times SP^3}$, nimirum vis centralis directe ut differentia perpendiculi SP, & reciproce ut cubus ejuſdem perpendiculi ductus in differentiam altitudinis SA, Q. E. I.

§. 168. Aliqua ergo ex allatis formulis uti poſſumus ad vires centrales in datis motibus curvilineis, hoc eſt in datis curvis inveſtigandas, ſed hæc mihi poſtrema videtur facilior; reperiatur videlicet ex natura curvæ datæ æquatio quæ exprimat quam proportionem inter ſe habeant radius ſeu altitudo corporis a dato centro virium (qui radius dicatur r), & perpendicularis (quæ dicatur p) ducta ex virium centro ſuper tangente; indeque per notas calculi differentialis leges reperiatur valor $\frac{dp}{p^3\, dr}$: nec

ma-

majorem hoc problema habebit difficultatem quam problema tangentium directum.

Adnotari hic poteſt in vi centripeta creſcente radio ſeu diſtantia corporis a centro virium SA = r, creſcere etiam perpendicularem SP = p ex centro virium ſuper tangente: contra vero in vi centrifuga creſcente radio perpendicularem decreſcere. Id ex eo patet quod perpendicularis ſuper tangente ducta in diametrum circuli oſculantis eſt ſemper æqualis rectangulo diſtantiæ in chordam ejuſdem circuli per centrum virium tranſeuntem (§. 166.), hoc eſt SP × AR = SA × AE, & SD × BQ = SB × BH: quare, ob AR = BQ, erunt perpendicula SP, SD proportionalia rectangulis SA × AE, SB × BH. atqui in vi centripeta Fig. 47. 48., quoniam curva (§. 152) eſt verſus centrum S concava, circulus oſculi & centrum virium jacebunt ex eadem parte, ac proinde ſi SA ſit major quam SB, erit etiam (lib. 3. elem. 6. & 7.) centro circuli C proximior; & SA × AE major quam SB × BH. Contra vero in vi centrifuga Fig. 49. quoniam curva convexitatem centro virium S vertit, circulus oſculi ex contraria parte jacebit, adeoque SB major quam SA eſt etiam a centro circuli C remotior, & SB × BH minor quam SA × AE.

Ex quo colligitur quod poſita radii ſeu altitudinis differentia dr poſitiva, perpendiculi differentia dp in vi centripeta erit etiam poſitiva, & ſigno poſitivo affecta + dp, at in vi centrifuga erit negativa − dp: formula ergo vis centripetæ erit $f = \frac{dp}{p^3\,dr}$, & vis centrifugæ $f = \frac{-dp}{p^3\,dr}$, ſeu $-f = \frac{dp}{p^3\,dr}$.

§. 169. Ex hac eadem trajectoriæ æquatione ex-

exprimente rationem inter radium & perpendiculum colligi poteſt analytice quam rationem habeant inter ſe velocitas corporis in quolibet trajectoriæ puncto A & velocitas corporis deſcribentis eadem vi centripeta circulum LAO in eadem a centro virium diſtantia SA (quandoquidem §. 156. demonſtratum eſt, circulum deſcribi poſſe in qualibet virium centripetarum lege & in quacumque a virium centro diſtantia.) Sunt enim hujuſmodi velocitates in ſubduplicata ratione corradii ſeu ſemichordæ AX, quæ in circulo oſculante ducitur, per centrum virium S, ad diſtantiam AS. Fig. 47.

Nam ponatur corpus in puncto A tempore infinite parvo impelli a vi centripeta per ſpatiolum AG verſus centrum S, & ex puncto G ducantur ad tangentes AF, AL trajectoriæ & circuli parallelæ GB, GK: patet arcus infinite parvos AB trajectoriæ, & AK circuli eodem minimo tempore deſcribi, adeoque proportionales eſſe velocitatibus quibus deſcribuntur: quadratum ergo velocitatis in trajectoria ad quadratum velocitatis in circulo eſt ut quadratum AB, ſeu (§. 165.) rectangulum $EA \times AG$ ad quadratum AK ſeu ad rectangulum $2SA \times AG$, hoc eſt ut $EA$ ad $\frac{1}{2}SA$, ſive ut $\frac{1}{2}EA$ hoc eſt corradius XA ad diſtantiam SA. Quod E. D.

Atqui (§. 166.) $AX = \frac{SP \times AC}{SA}$: ergo quadrata velocitatum in trajectoria & in circulo ſunt ut $SP \times AC$ ad $SA^2$.

Et poſitis denominationibus §. 168., nimirum radio ſeu diſtantia $SA = r$, & perpendiculo $SP = p$, eorumqne differentiis $AM = dr$, PN

$= dp$,

$=dp$, demonſtratum eſt §. 167. CA $= \frac{rdr}{dp}$: ergo quadrata velocitatum in trajectoria & in circulo ſunt ut $\frac{prdr}{dp}$ ad $rr$, ſive ut $\frac{pdr}{dp}$ ad $r$. Quod inveniendum propoſuimus.

# PROPOSITIO II.

## PROBLEMA

*Data lege vis centralis tendentis ad datum punctum, reperire orbes ſeu curvas trajectorias quas corpus ea vi deſcribere poteſt.*

§. 170. VIS centripeta f in ſuperiore propoſitione (§. 168.) demonſtrata eſt proportionalis quantitati $\frac{dp}{p^3\,dr}$; quare $fdr = \frac{dp}{p^3}$, & integrando habetur $S.\,fdr = \frac{1}{-2pp}$, aut etiam $S.\,fdr = \frac{1}{-2pp} \pm ab$ (ab eſt quantitas conſtans arbitraria) ex quibus colligitur $p = \frac{1}{\sqrt{-2S.\,fdr}}$ aut etiam $p = \frac{1}{\sqrt{\pm ab - 2S.\,fdr}}$, quæ æquationes (ſubſtituendo pro f ejus valore ex data lege vis cen-

centripetæ) determinabunt curvas quas corpus deſcribere poteſt.

§. 171. Similiter ex vi centrifuga (§. 168.) $f = \frac{-dp}{2pp}$ colligitur S. fdr $= \frac{1}{2pp}$, aut S. fdr $= \frac{1}{2pp} \pm ab$: unde æquationes ad curvas quas vi centrifuga corpus deſcribere poteſt erunt $p = \frac{1}{\sqrt{S. fdx}}$, aut $p = \frac{1}{\sqrt{S. fdx \mp ab}}$.

§. 172. Sit curva AB quam corpus deſcribit vi centrali tendente ad punctum S, ſintque radii SB, Sb infinite proximi, eorumque differentia Db; ductaque normali SP ex centro ſuper tangente in puncto B, ſit, ut ſupra, SP $= p$, SB $= r$, DB $= dy$, Db $= dr$; eritque (ob ſimilitudinem triangulorum BbD, SbP) $Bb^2$ $(dy^2 + dr^2)$. $BD^2$ $(dy^2)$ : : $SB^2$ $(rr)$. $SP^2$ $(pp) = \frac{rrdy^2}{dy^2 + dr^2}$. Quod ſi centro S, radio ad arbitrium SA $= c$ deſcribatur circulus AG, cujus peripheriam ſecent in G & g radii SB, Sb, ac proinde differentia hujus peripheriæ ſit Gg, quæ ponatur $= dz$; erit c. r : : dz. dy $= \frac{rdz}{c}$, quare $pp = \frac{r^4 dz^2}{rrdz^2 + ccdr^2}$. Ergo in vi centripeta (§. 169.) ſi loco pp hic ejus valor ſubſtituatur habebitur $\frac{r^4 dz^2}{rrdz^2 + ccdr^2} = \frac{1}{-S. fdr}$; aut Fig. 50.

etiam $\frac{r^4 dz^2}{rrdz^2 + ccdr^2} = \frac{1}{\pm ab - S.\, fdr}$; ex quibus æquationibus alii colliguntur canones ad curvas trajectorias ex data vi centripeta determinandas, nimirum $dz = \frac{cdr}{\sqrt{rr - r^4\, S.\, fdr}}$, itemque $dz = \frac{cdr}{\sqrt{\pm abr^4 - r^2 - r^4\, S.\, fdr}}$.

§. 173. Similiter ex vi centrifuga §. 170. ſi loco pp idem repertus ejus valor ſubſtituatur colliguntur canones $dz = \frac{cdr}{\sqrt{r^4\, S.\, fdr - rr}}$, itemque $dz = \frac{cdr}{\sqrt{\pm abr^4 - r^2 + r^4\, S.\, fdr}}$.

## SCHOLION.

§. 174. HOC problema eſt converſum problematis antecedentis, ideo illud dicitur problema directum, hoc converſum virium centralium. In problemate directo datur curva quam corpus deſcribit, ex cujus æquationis differentia (quæ per notas calculi differentialis regulas habetur) eruitur facile valor vis centralis terminis finitis expreſſus. Contra vero in problemate inverſo datur valor ſeu lex vis centralis, & quæritur curva quam corpus ea lege deſcribit; hæc autem curva exprimitur æquatione differentiali, quæ proinde integranda eſt ut in terminis finitis habeatur: adhibendus eſt ergo calculus integralis, cujus regulæ non adeo in promptu ſunt quemadmodum calculi

culi differentialis, & ſepe etiam deſunt, quod reddit hoc problema inverſum multo difficillimum in pleriſque caſibus particularibus.

§. 175. Nos duas attulimus hujus problematis ſolutiones. Prior §. 170. & 171. dat æquationem differentialem exprimentem relationem quæ intercedit inter radium ductum a centro virium ad punctum aliquod trajectoriæ & normalem ductam itidem a centro virium ſuper recta tangente trajectoriam in eodem puncto: ſufficit autem ut integrari poſſit quantitas S. fdr ad hoc ut æquatio illa differentialis convertatur in æquationem exprimentem in terminis finitis dictam relationem inter normalem & radium. Sed pleræque curvæ ſunt quarum conſtructio & natura non adeo facile eruitur ex hujuſmodi relatione inter normalem & radium: imo ex ea, ſeu ex data normali, atque adeo tangente, vel ſubtangente analyſtæ ſolent naturam curvæ inquirere ope calculi integralis methodo tangentium inverſa. In his ergo caſibus adhibenda eſt ſecunda ſolutio quam dedimus §. 172, 173, quamque ex prima ipſa deduximus ſola ſubſtitutione valoris normalis p: In hac porro ſolutione non ſufficit ſola integratio quantitatis S. fdr ut æquatio trajectoriam determinans finita evadat, ſed remanet adhuc differentialis, & adhuc integranda; quod tametſi difficilius ſit, deſcriptionem tamen curvæ faciliorem reddit; etenim ſatis eſt ſi differentiale $\frac{cdr}{\sqrt{-rr-r^4\,S.fdr}}$,

vel $\frac{cdr}{\sqrt{\pm abr^4 - r^2 - r^4\,S.fdr}}$ aut integrari poſſit, adeoque haberi ratio inter arcum circula-

Fig. 50. rem AG (z) & altitudinem SB (r), aut reduci ad aliud differentiale arcus circularis, ſive alterius curvæ lineæ, aut areæ curvilineæ per conſtantem aliquam diviſæ: ſupponitur enim curvarum rectificatio, & arearum curvilinearum quadratura: quinimo ex hac ſolutioue cognoſcitur num trajectoriæ deſcriptio pendeat a rectificatione curvarum, aut quadratura arearum curvilinearum, an vero algebraice haberi poſſit: ſi enim ſupradictum differentiale reduci poteſt ad differentiale arcus circularis cujus radius ſit ad radium c arcus z ut numerus ad numerum, tum trajectoria quæſita erit algebraica, ſingula enim ejus puncta haberi poterunt per diviſionem arcus circularis in data ratione numeri ad numerum, quæ diviſio algebraica conſtructione habetur.

# PROPOSITIO III.

## THEOREMA.

§. 176. **D**Ata qualibet virium centralium lege moveantur duo æqualia corpora alterum libere ſola vi centrali impulſum ſecundum rectam lineam per centrum virium tranſeuntem, alterum vero motu compoſito ex centrali & tangentiali per quamlibet curvam: Si duo hæc corpora in quadam æquali a centro diſtantia æqualem habere velocitatem reperiantur, æqualem etiam velocitatem habebunt in aliis quibuſcumque æqualibus a centro diſtantiis.

Sit ADS recta & ABK curva quælibet, per quas lineas corpora moveantur vi centrali quacumque tendente ad centrum S: ſintque B, D duo

duo puncta æque a centro S diſtantia, in quibus æquales habere ſupponantur velocitates; Fig. 51. & 52. tum ſumpta Dd infinite parva deſcribatur centro S per punctum d arcus circularis db, qui ſecet rectam SB in N; ex quo puncto ducatur ſuper curvæ elemento Bb perpendicularis NM.

Quoniam puncta B, D æque a centro virium S diſtant, vires centrales in ipſis æquales ſunt; exprimi proinde poſſunt æqualibus lineolis Dd, BN: quamvis vero hujuſmodi vires æquales ſint, tamen ea quæ in puncto D trahit corpus per Dd plene & integre agit; ea vero quæ in puncto B corpus movere debet per curvæ elementum Bb non integra agit ſed refrenatur obliquitate directionis Bb, juxta quam ob tangentialem impulſum cogitur corpus moveri: quantum vero imminutionis obliqua hac directione vis illa centralis patiatur colligitur ex doctrina motus compoſiti eodem plane ratiocinio quo vulgo utuntur Mechanici ad vim gravitatis in plano inclinato determinandam: nimirum vis BN æquivalet duabus viribus quæ ſimul agant juxta directiones BM, MN, quæque ad vim BN ſint ut rectæ ipſæ BM, MN ad BN. Harum vero virium componentium altera nempe MN nullo modo accelerat corpus ſecundum directionem BM cum ei ſit perpendicularis: ſola ergo vis BM corpus ſecundum hanc directionem accelerat: quare vis centralis per BN ſeu Dd eſt ad vim centralem per Bb ut BN ſeu Dd ad BM. Quibus poſitis cum ex Mechanicis conſtet atque a nobis demonſtratum ſit §. 24. velocitates a duabus viribus productas eſſe inter ſe in compoſita ratione virium producentium & temporum quibus producuntur; proinde velocitas quam producit vis BM in corpore B eo tempore quo percurritur curvæ elementum Bb erit ad velocitatem productam a

vi Dd in corpore D eo tempore quo percurritur Dd in ratione compoſita BM ad Dd, & temporis per Bb ad tempus per Dd: atqui hæc tempora ſunt inter ſe ut ſpatia ipſa Bb ad Dd (quandoquidem in punctis B & D corpora æqualem velocitatem habere ſupponuntur, motuſque per ſpatiola infinite parva Bb, Dd uti æquabiles habendi ſunt): velocitas ergo in corpore B producta erit ad velocitatem productam in corpore D in ratione compoſita BM ad Dd, & Bb ad Dd, hoc eſt ut rectangulum BM×Bb ad quadratum Dd ſeu ad quadratum BN: eſt autem in triangulis rectangulis ſimilibus BNb, BMN, rectangulum BM×Bb æquale quadrato BN. Igitur ſi in punctis B, D a centro virium æquidiſtantibus æqualem velocitatem habeant corpora dum percurrunt ſpatiola Bb, Dd æqualis etiam gradus velocitatis eis ſuperadditur; eodemque argumento demonſtrabitur, in æqualibus quibuſcumque a centro diſtantiis æquales eſſe debere velocitates. Q. E. D.

§. 177. Coroll: 1. Si ergo in data quacumque vi centrali tendente ad punctum S corpora duo æqualia ex eodem loco A cum eadem celeritate aut externo impulſu eis impreſſa, aut lapſu ex eadem ſublimitate RA acquiſita, moveantur, alterum ſecundum rectam AS per centrum virium S tranſeuntem, alterum vero ſecundum curvam quamcumque AB; æquales erunt horum corporum velocitates in locis quibuſcumque B, D æquali intervallo a centro S diſtantibus.

§. 178. Coroll: 2. Sit R punctum ſublime, unde corpus ex quiete cadere debeat ut in data virium centralium lege lapſu rectilineo per RA acquirat in A velocitatem tangentialem qua deſcribitur curva ABK; & centro S radio SR deſcribatur circulus RH: erit in quolibet alio

cur-

curvæ puncto B. velocitas tangentialis ea quæ acquiritur lapſu per ſublimitatem HB interpoſitam inter peripheriam RH & punctum ipſum B. Nam velocitas tangentialis in B æquatur (§. 177.) velocitati in puncto æquealto D corporis cadentis ex quiete in puncto ſublimi R: perinde autem eſt, ſive corpus decidat per RD ſive per HB. Circulus RH vocari poteſt *circulus ſublimitatis*. Cum igitur in data lege virium centralium deſcribitur curva ABK, nihil refert ubinam corpus projectum fuerit, ſeu externum impulſum ad curvæ deſcriptionem (§. 150.) neceſſarium acceperit, perinde enim eſt in uno an in alio perimetri puncto impellatur, dummodo impellatur juxta directionem tangentis in puncto illo, eaque celeritas ei communicetur quam acquireret lapſu rectilineo ex peripheria circuli ſublimitatis uſque ad punctum illud.

§. 179. Coroll: 3. Colligi poteſt ex hoc theoremate ſolutio problematis Prop: VI. §. 162, colligi inquam poteſt formula adducta §. 168. reperiendi in data curva vires centrales tendentes ad datum punctum.

Sit enim data curva AB, & centrum virium S, & ex curvæ puncto quolibet A moveri ſupponantur cum eadem velocitate duo corpora æqualia, alterum ſecundum rectam AS per centrum virium tranſeuntem, alterum vero ſecundum datam curvam AB; ſitque GEy ſcala velocitatum in motu rectilineo per ADS. Cumque velocitates in punctis æqualibus B, D demonſtratæ ſint in hoc theoremate æquales, eamdem rationem habebunt ad velocitatem (communem ex ſuppoſitione) in puncto A: atqui velocitas in D ad velocitatem in A eſt ut ordinata DE ad ordinatam AG in ſcala velocitatum, & velocitas in B ad velocitatem in A eſt reciproce (§. 155.) ut SP perpendicularis ſuper tan-

gente in puncto A ad SQ perpendicularem ſu[illegible]
tangente in puncto B: ergo ordinatæ DE, [illegible]
ſunt inter ſe reciproce ut perpendiculares S[illegible]
SQ: Si ergo ponatur velocitas DE $=$ u, & p[illegible]
pendicularis SQ $=$ p, radius vero SD, [illegible]
SB $=$ r, erit rectangulum DE$\times$SQ (up) [illegible]
quantitati conſtanti puta unitati, adeoque [illegible]

$= \frac{1}{pp}$, & differentiando udu $= \frac{-dp}{p^3}$

Quibus poſitis cum in punctis æquealtis D [illegible]
vires centrales æquales ſint, in puncto vero [illegible]
vis centralis eſt (§. 116.) ut ſubnormalis ei [illegible]
puncto reſpondens in ſcala velocitatum, ſci[illegible]

vis centralis f $= \frac{de \times en}{En} \left(\frac{udu}{dr}\right)$; & qu[illegible]

in vi centripeta (§. 117.) f $= \frac{-udu}{dr}$, [illegible]

vi centrifuga f $= \frac{udu}{dr}$: ideo ſi loco udu ſu[illegible]

tuatur ejus valor mox inventus $\frac{-dp}{p^3}$,

in puncto D, ſeu in puncto trajectoriæ æq[illegible]

to B (ſi vis ſit centripeta fig. 51.) f $= \frac{dp}{p^3 dr}$

vel (ſi vis centrifuga fig. 52.) f $= \frac{-dp}{p^3 dr}$

mnino uti demonſtratum fuit §. 168.

Pl[illegible]

# PROPOSITIO IV.

## PROBLEMA.

§. 180. **D**Ata lege vis centralis tendentis ad datum centrum S, projiciatur corpus in dato loco A cum data velocitate ſecundum datam directionem AP: reperire trajectoriam quam deſcribit. Fig. 51. 52.

Hoc problema idem eſt cum ſuperiore §. 170, ſed trajectoriam magis determinat: cum enim eadem vi centrali plures trajectoriæ deſcribi poſſint (§. 161.), ſi tamen data ſit velocitas & directio juxta quam corpus in dato loco impellitur, nonniſi una trajectoria deſcribi poteſt (§. 157.). Hujuſmodi vero trajectoria ita poteſt reperiri.

Recta BQ tangat trajectoriam in quolibet puncto B, quemadmodum data directio projectionis AP tangit (§. 149.) eamdem in puncto A, ducantur ex centro S ſuper his tangentibus normales SP, SQ, itemque radius SB cui ex SA abſcindatur æqualis SD: Sintque SA = a, SP = b, SB = SD = r, SQ = p. Et quoniam datur vis centralis, dabitur in recta SA punctum ſublime R (§. 4.) unde corpus ex quiete cadere debeat uſque ad punctum A ut eo lapſu datam velocitatem acquirat: dabitur ergo ſcala velocitatum corporis cadentis ex quiete in puncto R (§. 10.), atque adeo ratio velocitatis in A ad velocitatem in puncto D, ſeu (§. 176.) in trajectoriæ puncto æque alto B; hæcque ratio exprimi debet quantitate variabili SD (r) & conſtanti SA (a) aliiſque quantitatibus conſtantibus. Atqui eadem velocitas in puncto A eſt ad velocitatem in puncto B (§. 155.) reciproce ut SQ (p) ad SP (b): Igitur hac veloci-

locitatum & normalium reciproca proportion
habebitur æquatio trajectoriam exprimens pe
relationem radii SB (r) ad normalem SQ (p)
Et ſi loco hujus normalis ponatur ejus valo

$$\frac{rrdz}{\sqrt{rrdz^2 + ccdr^2}}$$ uti factum eſt §. 172

alia habebitur trajectoriæ æquatio, quæ in ple
riſque caſibus utilior eſt ad eam determinan
dam.

§. 181. Coroll: 1. Sit RGE ſcala velocitatu
corporis cadentis ex quiete in puncto R, et
ordinata AG velocitas qua corpus in puncto
projectum ſupponitur ſecundum datam directio
nem AP; itemque quælibet alia ordinata D
erit velocitas in curvæ puncto æquealto B ſ
cundum directionem tangentis BQ: ſemperq
datum rectangulum AG×SP æquabitur cuilib
alio rectangulo DE×SQ. Ex quo Apſides traj
ctoriæ AB facile determinantur ſi in ſcala vel
citatum RG reperiantur abſciſſæ SX, Sx, q
cum ſuis ordinatis XY, xy comprehendant r
ctangula SXY, Sxy inter ſe & dato rectangu
SP×AG æqualia: Nam ipſæ abſciſſæ SX,
erunt apſidum a centro diſtantiæ, illa quid
SX major diſtantia apogæi ſeu aphelii, hæc n
nor Sx perigæi ſeu perielii. Siquidem ubi
dius SB coincidit cum perpendiculari SQ ang
lus SBQ eſt rectus, & punctum B apſis.

§. 182. Coroll: 2. Si directio projectionis
ſit ad AS perpendicularis punctum A erit ap
aliorum vero apſidum (ſi adſint in vi cen
peta fig: 51.) diſtantia a centro reperietur
ptando in ſcala velocitatum rectangulum æq
le rectangulo SAG. Quod ſi exiſtente pr
ctione AP ad AS perpendiculari diſtantia
talis ſit ut rectangulum SAG ſit maximum
mniun

mnium ſcalæ velocitatum ſimiliter inſcriptorum, tum trajectoria erit circulus: Cum enim SAG ſit maximum, adeoque majus quam quodlibet aliud SDE, erit multo majus quam SQ×DE; non ergo erit aliud trajectoriæ punctum B, cujus a centro diſtantia SB ſeu SD ſit major aut minor quam SA.

§. 183. Coroll: 3. In trajectoriis quæ vi centrifuga deſcribuntur unus tantummodo apſis eſſe poteſt, iſque erit perigæum ſeu perielium. Siquidem aucta diſtantia SB ſeu SD augetur etiam velocitas ſeu ordinata ad ſcalam velocitatum: non ergo eſſe poſſunt duæ diverſæ diſtantiæ quæ cum ſuis reſpectivis ordinatis rectangula æqualia comprehendant. Fig. 52.

§. 184. Coroll: 4. Sit ad axem SR curva LVO, cujus quælibet ordinata DV æquetur perpendiculari SQ ductæ ex centro virium S ſuper BQ tangente trajectoriam in puncto B æque alto ac punctum D: Erit hujuſmodi curva LVO reciproca ſcalæ velocitatum RGE: quandoquidem eſt DE. AG:: SP. SQ ſive:: AL. DV., atque adeo erit [§. 8.] ſcala temporum elementarium in motu rectilineo per ADS; & tempora per ſpatia quæcumque AD, DF proportionalia areis ADVL, DFOV. Item ex dictis §. 153. conſtat, in motu curvilineo per ABK ſcalam temporum elementarium eſſe curvam ipſam ABKS radiis ad centrum ductis deſcriptam, & tempora per quoslibet trajectoriæ arcus AB, BK eſſe proportionalia areis ASB, BSK. Sed ſi tempus motus curvilinei per quemlibet trajectoriæ arcum BK conferatur cum tempore motus rectilinei per quamlibet ſpatii partem AF, reperietur eſſe area BSK ad dimidium areæ AFOL. Nam cum in punctis æque altis B, D velocitates [§. 180.] æquales ſint, iiſque percurrantur elementa Bb, Dd, erunt tempora quibus Fig. 51. & 52.

per-

percurrantur ut elementa ipſa Bb, Dd, ſeu [ob SQ = DV ] ut rectangula Bb×SQ, Dd×DV; vel ut eorum rectangulorum dimidia, ſcilicet ut area triangularis BSb ad dimidium areæ DVud. Cum igitur tempus per Bb ad tempus per Dd ſit ut triangulum BSb ad dimidium areæ DVud: ſi primæ & tertiæ harum quatuor magnitudinum ſumantur [§. 153.] duæ magnitudines proportionales ſcilicet tempus motus curvilinei per quemlibet arcum BK, & area quæ eidem arcui reſpondet BSK; ſimiliterque ſecundæ & quartæ magnitudinis ſumantur [§. 8.] duæ aliæ magnitudines proportionales; ſcilicet tempus per quodlibet ſpatium rectilineum AF, & dimidium areæ quæ eidem ſpatio correſpondet AFOL; reperietur tempus motus curvilinei per arcum BK ad tempus motus rectilinei per ſpatium AF ut area BSK ad dimidium areæ AFOL. Quod E. D.

## SCHOLION.

§. 185. IN hoc problemate tametſi una tantummodo determinetur trajectoria ex omnibus quæ eadem lege virium centralium deſcribi poſſunt; tamen percurrendo varias velocitates quibus corpus projici poteſt, ſeu (quod idem eſt) varias ſublimitates unde corpus prius lapſum ſupponitur; itemque varias a centro diſtantias puncti projectionis, variaſque directiones ſecundum quas projicitur, determinari poſſunt omnes quotquot eadem lege virium centralium deſcribuntur trajectoriæ, ſive poſitione, ſive magnitudine, ſive etiam natura diverſæ. Quinimo hoc problema ſuperiori eſt anteponendum, clarius enim & diſtinctius theoria omnis motus percipitur, & altitudines, directiones, velocitateſque corporum ſeu ſublimitates deter-

minat

minat unde labantur oportet ut trajectorias deſcribant.

Sequitur ut trium horum problematum exempla nonnulla afferamus.

## EXEMPLUM I.

§. 186. REvolvatur corpus in ſpirali logarithmica ABS: reperire legem vis centripetæ tendentis ad centrum S. Fig. 53.

Quoniam anguli omnes SAP, SBQ radiis & tangentibus comprehenſi æquales ſunt, erit (ductis normalibus SP, SQ) conſtans ratio radii SA (r) ad normalem SP (p), puta : : a . b., quare br = ap, & bdr = adp, atque edeo vis centralis (§. 168.) $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{b}{ap^3} = \frac{aa}{bbr^3}$, hóc eſt reciproce ut cubus diſtantiæ a centro Q. E. I.

## EXEMPLUM II.

§. 187. VOlvatur corpus in ſpirali hyperbolica ABS: reperire legem vis centripetæ tendentis ad centrum S.

Sit radius SA = r, perpendicularis ſuper tangente SP = p, ſubtangens SC ad radium perpendicularis = a, ſubtangens nempe conſtans ex hujus curvæ natura: eritque $AC^2$ (aa + rr), $AS^2$ (rr) : : $SC^2$ (aa), $SP^2$ (pp): quare aapp + rrpp = aarr, & differentiando aapdp + rrpdp =

aardr

$aardr - pprdr$; ideoque (§. 168.) $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{aar - ppr}{aap^4 - rrp^4} =$ (substituto valore $pp = \frac{aarr}{aa + rr}$) $\frac{1}{r^3}$; nimirum vis centripeta reciproce ut cubus diſtantiæ a centro. Q. E. I.

---

# EXEMPLUM III.

Fig. 54. §. 188. Sit BAS ſpiralis cujuſcumque generis: reperire in corpore eam deſcribente legem vis centripetæ tendentis ad centrum S

Radio quocumque $SB = a$ deſcribatur circulus BDM, cujus peripheria $= b$; tum quilibet ſpiralis radius $SA = r$ productus ſecet eam peripheriam in D, abſcindatque a puncto B arcum $BD = z$, ſitque natura ſpiralium in genere expreſſa per analogiam $b. z :: a^m. r^m$, unde æquatio $br^m = a^m z$, & differentiando $mbr^{m-1} dr = a^m dz$: Eſt autem SD (a). SA (r) :: Dd (dz). AM $\left(\frac{rdz}{a}\right) = \frac{mbr^m dr}{a^{m+1}}$: unde $Aa^2 = AM^2 + Ma^2 = \frac{m^2 b^2 r^{2m} + a^{2m+2}}{a^{2m+2}} dr^2$. Et (ducta ex centro ſuper tangente perpendiculari $SP = p$)

Aa 2

$$Aa^2\left(\frac{m^2b^2r^{2m}+a^{2m+2}}{a^{2m+2}}dr^2\right) . AM^2\left(\frac{m^2b^2r^{2m}}{a^{2m+2}}dr^2\right)$$

$$:: SA^2(rr) . SP^2(pp) = \frac{m^2b^2r^{2m+2}}{m^2b^2r^{2m}+a^{2m+2}};$$ ex cujus æquationis differentiâ eruitur lex vis centralis $\frac{dp}{p^3dr}$ proportionalis quantitati $\frac{\overline{m+1}\times a^{2m+2}+m^2b^2r^{2m}}{r^{2m+3}}$ Q. E. I.

§. 189. Si $m = -1$, erit vis centripeta $= \frac{1}{r^3}$ ut in ſpirali hyperbolica §. 187. Si $m = 0$, erit ſimiliter vis $= \frac{1}{r^3}$ ut in ſpirali logarithmica §. 186. In ſpirali archimedea, in qua $m = 1$ erit vis centripeta $= \frac{2a^4+bbrr}{r^5}$.

§. 190. Si m ſit numerus negativus major unitate, erit $m+1$ negativus, quare vis centralis $\frac{\overline{m+1}\times a^{2m+2}+m^2b^2r^{2m}}{r^{2m+3}}$ erit poſitiva, hoc eſt (§. 168.) centripeta ubi ſit $m^2b^2r^{2m}$ major quam $\overline{-m-1}\times a^{2m+2}$; ſed ſi ſit æqualis vis erit nulla, & mutabitur in negativam ſeu centrifugam ubi ſit

ſit minor; unde in hac hypotheſi ſpiralis habebit punctum contrarii flexus (§. 152.). Ita ſi $m = -2$, erit $aab = rrz$ ſpiralis hyperbolicæ ſecundi gradus, & vis centralis $= \frac{4aabb - r^4}{r^3}$, quæ eſt centripeta ubi $rr$ minor ſit quam $2ab$, nulla ubi $rr = 2ab$, & centrifuga ubi ſit $rr$ major $2ab$.

## EXEMPLUM IV.

Fig. 55. §. 191. Volvatur corpus in ellipſi AB: reperire legem vis centripetæ tendentis ad centrum ellipſis S.

Sit radius $SA = r$, normalis SP ducta ex centro ſuper tangente $= p$, factaque ex centro S ad tangentem AP parallela SB, erunt SA, SB ſemidiametri conjugatæ, earumque quadratorum ſumma (ex natura ellipſis) æqualis conſtanti quantitati puta $= cc$; quare $SB^2 = cc - rr$, & $SP \times SB$ $(p \times \sqrt{cc - rr}) =$ quantitati conſtanti puta $bb$, ex natura itidem ellipſis. Igitur $ccpp - rrpp = b^4$, & differentiando $ccpdp - rrpdp = pprdr$; adeoque vis centripeta $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{r}{ccpp - rrpp} = \frac{r}{b^4}$, ſcilicet proportionalis diſtantiæ SA $(r)$. Q. E. I.

# EXEMPLUM V.

§. 192. Idem demonſtrabitur de hyperbola HA ſi in ea revolvatur corpus vi centrifuga tendente ad centrum hyperbolæ S. Eſt enim (poſita quacumque ſemidiametro ſeu radio SA $= r$) ejus ſemidiameter conjugata $= \sqrt{rr \mp cc}$, quæ ducta in SP (p) dabit $rrpp \mp ccpp = b^4$ (ſignum $-$ pertinet ad caſum quando r eſt major ſemidiametro conjugata, ſignum $+$ quando eſt minor, quod ſi æquales ſint delenda eſt quantitas cc, eritque $rp = bb$ æquatio ad hyperbolam æquilateram): quare differentiando erit $rrpdp \mp ccpdp = -pprdr$; & $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{-r}{b^4}$; ſcilicet (§. 168.) vis centrifuga proportionalis diſtantiæ a centro SA (r). Quod E. I. Fig. 56.

# EXEMPLUM VI.

§. 193. Volvatur corpus in circulo AB; reperire legem vis centralis tendentis ad punctum quodcumque datum S ſive intra ſive extra circulum. Fig. 57.

Ducatur ex centro virium (ſive intra ſive extra circulum exiſtat) radius quicumque SA $= r$, & ſuper tangente AP perpendicularis SP $= p$, ac per centrum circuli C ducatur SCE, ſitque ſemidiameter CE $= c$, SE $= a$, SD $= b$:

eritque SA (r). SE (a) :: SD (b). SB $= \frac{ab}{r}$ adeoque AB $=$ SA $-$ SB $= \frac{rr - ab}{r}$ (ſi radius ponatur in parte convexa SB $=$ r, reperietur AB $= \frac{ab - rr}{r}$; & ſi centrum virium S ſit intra circulum erit Ab $= \frac{rr + ab}{r}$): Ducta autem ex puncto B diametro BH, junctaque AH, triangula rectangula BAH, SPA erunt ſimilia, ideoque SA (r). SP (p) :: BH (2c). BA $\left( \frac{rr \mp ab}{r}, \right.$ ſive $\left. \frac{ab - rr}{r} \right)$: & $rr \mp ab = 2cp$, ſive $ab - rr = 2cp$: & differentiando $rdr = cdp$, ſive $-rdr = cdp$. atque adeo (§. 168.) vis centripeta $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{r}{cp^3} = \frac{8ccr}{\overline{rr \mp ab}^3}$, ſive proportionalis $\frac{r}{\overline{rr \mp ab}^3}$ & vis centrifuga in parte convexa proportionalis $\frac{-r}{\overline{ab - rr}^3}$. Eſt autem ES $\times$ SD (ab) $=$ AS $\times$ SB adeoque $rr \mp ab =$ SA $\times$ AB ſive sA $\times$ Ab: & in vi centrifuga $ab - rr =$ SB $\times$ BA. Igitur vis centri-

peta

peta in puncto extra circulum S erit $\left(\frac{r}{\overline{rr-ab}^3}\right)\frac{SA}{SA^3 \times AB^3} = \frac{1}{SA^2 \times AB^3}$: & in puncto s intra circulum erit $\left(\frac{r}{\overline{rr+ab}^3}\right)\frac{sA}{sA^3 \times Ab^3} = \frac{1}{sA^2 \times Ab^3}$: Et vis centrifuga in parte convexa reſpectu puncti S extra circulum erit $\left(\frac{-r}{\overline{ab-rr}^3}\right)\frac{SB}{SB^3 \times BA^3} = \frac{1}{SB^2 \times BA^3}$: Erit ergo vis in quocumque caſu ſive centripeta ſive centrifuga reciproce ut quadratum diſtantiæ corporis a centro virium, & cubus chordæ circuli per centrum virium tranſeuntis. Q. E. I.

§. 194. Si $rr = ab$, erit (reſpectu centri virium S poſiti extra circulum) tam vis centripeta $\frac{r}{\overline{rr-ab}^3}$, quam vis centrifuga $\frac{-r}{\overline{ab-rr}^3} = \frac{r}{0}$, ſcilicet infinita: idque evenit in punctis M, N, ubi tangunt (§. 152.) circulum radii ducti a centro virium SM, SN: Eaque puncta terminant arcum circuli concavum MEN qui deſcribitur vi centripeta, & arcum convexum MDN qui deſcribitur vi centrifuga.

§. 195. Coroll. 1. Si centrum virium S ſit in

ipſa circuli peripheria puta in D, vis centripeta erit $\frac{1}{r^5}$, hoc eſt reciproce ut diſtantia ad quintam poteſtatem evecta. 2. Si centrum virium S ſit in infinita diſtantia, erunt radii SE, SA, SM &c. æquales & paralleli inter ſe, ac perpendiculares eidem diametro FG chordas omnes AB bifariam ſecanti in K, & puncta M, N conveniunt cum punctis F, G; vis autem tum centripeta qua deſcribitur ſemicirculus FEG, tum centrifuga qua deſcribitur ſemicirculus FDG, erit reciproce ut cubus AB ſive AK.

## LEMMA I.

Fig. 58. 59. 60. §. 196. IN qualibet coniſectione ductis ex quolibet puncto A curvæ normali AE, & per focum S recta AS; ſi ex puncto E axis, ubi ei occurrit normalis, demittatur ad ductam per focum perpendicularis EM, hæc abſcindet AM verſus curvam æqualem ſemiparametro.

Etenim in parabola (fig. 58.) ob SA = DB + BS = SE, erunt æquales anguli SAE, SEA; quare triangula rectangula ADE, EMA latus commune AE habentia erunt ſimilia & æqualia, proindeque AM = ED = ſemiparametro.

In ceteris vero ſectionibus ducta diametro CN tangenti AP parallela, ei occurrant normalis AE in R, ordinata AD in Q, & ducta per focum AS in N. Erit (ob ſimilia triangula rectangula AEM, ANR) AN. AR :: AE. AM. quare $NA \times AM = RA \times AE$ (ob ſimilitudinem triangulorum EAD, QAR) $= QA \times AD =$ (ducto ſemiaxe conjugato CG, ex quo tangens & ordinata in A abſcindant CH, CF æquales & parallelas AQ, AD) $HC \times CF = CG^2$: eſt ergo $NA \times AM = CG^2$ = rectangulo ſemiaxis majoris

joris CB in ſemiparametrum: atqui AN = CB uti demonſtrat Newtonus lib. 1. prop. xi. Princip. Ergo AM = ſemiparametro. Q. E. D.

§. 197. Coroll. Ducta ex A ad centrum AC, eique ex E perpendiculari EL, erit rectangulum CA × AL æquale quadrato ſemiaxis minoris CG: Nam triangula CAR; EAL ſimilia ſunt, adeoque CA × AL = RA × AE = $CG^2$.

## LEMMA II.

§. 198. SI in ellipſi & hyperbola ex focis S, s demittantur ad tangentem quamvis AP perpendiculares SP, sp: earum rectangulum æquabitur quadrato ſemiaxis conjugati; ſeu rectangulo ex dimidio axe majore & dimidio parametro.

Iiſdem poſitis ac in lemmate ſuperiore triangula rectangula ASP, Asp erunt ſimilia inter ſe & triangulo AEM: quare EA. AM :: SA. SP, ſimiliterque EA. AM :: sA. sp. unde EA × SP = SA × AM, & EA × sp = sA × AM: atque adeo ſumma in ellipſi & differentia in hyperbola rectangulorum EA × SP, EA × sp æquatur ſummæ in ellipſi & differentiæ in hyperbola rectangulorum SA × AM, sA × AM, hoc eſt duplo rectanguli ſemiaxis majoris in ſemiparametrum (nam AM (§. 196.) æquatur ſemiparametro, & ſumma in ellipſi ac differentia in hyperbola rectarum SA, sA æquatur axi majori); Atqui ſumma in ellipſi & differentia in hyperbola rectangulorum EA × SP, EA × sp eſt item dupla rectanguli SP × sp; quod ſic demonſtro. Productæ SP, sA concurrant in K, eruntque triangula KAP, SAP ſimilia & æqualia, nam præter angulos rectos ad P, habent angulos ad A ob tangentem æquales, & latus comune AP; igitur PK = PS, & AK = AS; eſt autem SK ſeu

2SP. AE :: Ks. sA :: sA $\pm$ AS. sA :: sp $\pm$ SP. sp. Quare 2SP $\times$ sp = AE $\times$ sp $\pm$ SP. Ergo &c. Q. E. D.

§. 199. Coroll. Hinc haberi poteſt æquatio ſectionum conicarum exprimens quam proportionem habeant inter ſe inclinata ex foco SA, & perpendicularis SP ex eodem foco ducta ſuper tangente. Sit enim axis tranſverſus Bb = a, parameter = b, radius SA = r, perpendicularis SP = p: Erit sA (a $\pm$ r). SA (r) :: sp. SP :: sp $\times$ SP $\left(\frac{1}{4}\ ab.\right)$ SP² (pp), unde app $\pm$ rpp = $\frac{1}{4}$ abr.

Fig. 58. §. 200. In parabola axis tranſverſus Bb (a) eſt infinitus, proindeque in allata æquatione delendus eſt terminus $\pm$ rpp, & remanebit æquatio ad parabolam pp = $\frac{1}{4}$ br.

Fig. 60. §. 201. In hyperbola ſi radii & perpendiculares inclinentur ex foco exteriore, ut nimirum ſit sA = r, sp = p; erit sA (r). AS (r — a) :: sp. SP :: sp² (pp). sp $\times$ SP $\left(\frac{1}{4}\ ab\right)$; & rpp — app = $\frac{1}{4}$ abr.

EXEM-

# EXEMPLUM VII.

§. 202. **R**Evolvatur corpus in coniſectione BA; reperire legem vis centralis tendentis ad focum. Fig. 58. 59. 60.

Iiſdem poſitis ac in lemmate ſuperiore, æquatio ad parabolam eſt (§. 200.) $pp = \frac{1}{4} br$, & differentiando, $2pdp = \frac{1}{4} bdr$; quare vis centripeta $\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{b}{8p^4} = \frac{2}{brr}$, nimirum reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro.

Similiter quoniam æquatio ad ellipſim & hyperbolam eſt (§. 199.) $pp = \frac{abr}{4a \mp 4r}$, erit differentiando $2pdp = \frac{4aabdr}{\overline{4a \mp 4r}^2}$, & vis centripeta

$$\frac{dp}{p^3 dr} = \frac{4aab}{2p^4 \times \overline{4a \pm 4r}^2} = \frac{2}{brr},$$

item reciproce in duplicata ratione diſtantiarum.

Idem reperietur in hyperbola BA ſi in ea revolvatur corpus vi centrifuga tendente ad focum exteriorem S. eſt enim (§. 201.) $pp = \frac{abr}{4r - 4a}$;

& differentiando $zpdp = \frac{-4aabdr}{\overline{4r-4a}^2}$; quare vis centrifuga (§. 168.) $\frac{-dp}{p^3\,dr} = \frac{2}{brr}$, ut ſupra; Q. E. I.

## EXEMPLUM VIII.

Fig. 61. §. 203. Volvatur corpus in coniſectione BA: reperire legem vis centralis tendentis ad punctum quodcumque datum S ſive intra ſive extra ſectionem.

Ne longo calculo fatigemur brevior & facilior problematis ſolutio (quod in ſimilibus caſibus uſuvenire ſolet) peti poteſt ex alia formula §. 166. Nimirum ex curvæ puncto quolibet A ducta ad centrum virium recta AS, & tangente AP, atque ex centro ſuper tangente perpendiculari SP: itemque poſito AY radio circuli oſculantis curvam in puncto A, qui radius ſecet curvæ axem Bb in puncto E; ex quo ſuper AS demittatur perpendicularis EM.

Notum eſt (uti videri poteſt apud Hoſpitalium anal. inf. parv. ſect. 5. prop. 2. exemp. 4.) radium oſculi in omni ſectione conica BA eſſe quadruplum quartæ proportionalis poſt parametrum & normalem AE; unde poſito parametro $= L$, erit radius oſculi $= \frac{4AE^3}{LL}$: vis ergo centralis, quæ (§. 166.) eſt directe ut diſtantia SA, & reciproce ut radius oſculi in cubum perpendicu-

diculi SP, erit ut $\frac{LL \times SA}{4AE^3 \times SP^2}$ = (ob SA. SP :: EA . AM) $\frac{LL \times SA}{4SA^3 \times AM^3}$, hoc eſt proportionalis $\frac{1}{SA^2 \times AM^3}$, ſcilicet reciproce ut quadratum diſtantiæ a centro virium SA in cubulum AM; Quod E. I.

§. 204. Coroll. 1. Si centrum virium S ſit focus ſectionis conicæ, erit AM (§. 196.) æqualis ſemiparametro, ſcilicet linea conſtans; ideoque vis centralis reciproce ut quadratum diſtantiæ SA, quemadmodum §. 202. demonſtratum eſt. Fig. 61. 58. 59. 60.

§. 205. Coroll. 2. Si centrum virium S ſit idem ac centrum ſectionis C, ducta ex puncto E ſuper CA perpendiculari EL, erit (§. 197.) CA×AL æquale quadrato ſemiaxis conjugati, hoc eſt quantitas conſtans, quare vis centralis $\frac{1}{SA^2 \times AN^3}$ erit in hoc caſu $\frac{CA}{CA^3 \times AL^3}$, ſcilicet directe ut diſtantia GA, uti exempla 4. 5 §. 191. & 192. Fig. 61. 59. 60.

§. 206. Coroll. 3. Si centrum virium S ſit extra ſectionem, duci ex eo poterit recta quæ tangat ſectionem in aliquo puncto A, in quo caſu SA coincidit cum AP, & EM cum EA, evadet ergo AM=o, & vis centralis $\frac{1}{SA^2 \times AM^3}$ erit infinita §. 152. Idemque dicetur ſi centrum virium ſit in ſectionis perimetro. Fig. 61.

§. 207. Coroll. 4. Si centrum virium S diſtet infinite ab axe ſectionis Bb, ita tamen ut diſtantiæ omnes AS ſint non ſolum inter ſe æquales

[171.] $p = \frac{1}{\sqrt{S.\ fdr}}$, & $p = \frac{1}{\sqrt{S.\ fdr \mp ab}}$ in hac hypotheſi $f = r$ dabunt æquationes $p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} rr}}$, & $p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} rr \mp ab}}$; quarum prima [§. 192.] eſt ad hyperbolam æquilateram, reliquæ duæ ad hyperbolas non æquilateras, omnes vero referuntur ad centrum hyperbolæ: hæc una igitur curva deſcribi poteſt vi centrifuga diſtantiis a centro virium proportionali.

At vero curvæ omnes ſi non ſpecie, ſaltem poſitione, & magnitudine diverſæ, quæ hac lege virium centralium deſcribuntur, determinari poſſunt, hujuſve motus curvilinei theoria omnis clare cognoſci ex dictis Prop. 9. ejuſque ſcholio. Sit ergo primum in vi centripeta.

## SECTIO I.

*Determinantur Curvæ quæ vi centripeta diſtantiis a centro virium proportionali percurruntur a Projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 211. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejuſdem directio, Fig. 62. & velocitas exprimatur recta data AG. Nunc juncta SA, eique in puncto A poſita ad angulos rectos data AG, centroque S intervallo SG deſcripto circulo RGH, qui productam SA ſecet in R, conſtat ex demonſtratis §. 24. & ſequent. quadrantem circuli RGH eſſe in hac lege

ge vis centripetæ ſcalam velocitatum corporis ex quiete in puncto R libere cadentis ad centrum motu rectilineo per RS, ita ut data eſſe debeat vel recta AG exprimens velocitatem projectionis, vel (quod idem eſt) ſublimitas RA unde corpus ex quiete cadere debeat ut in puncto A velocitatem illam acquirat. Quibus poſitis ſumatur in motu rectilineo per RS quodlibet punctum D, centroque S, intervallo SD deſcribatur arcus circuli DB, qui ſecet curvam, quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex virium centro demittatur perpendicularis SQ, quemadmodum SP ſuper data directione AP. Erit (§. 180.) AG. DE : : SQ. SP.

§. 212. Si ergo ponantur datæ SA = a, SP = b, SR = c & indeterminatæ SB = SD = r, SQ = p, erit $AG^2$ [cc — aa]. $DE^2$ (cc — rr) : : $SQ^2$ [pp]. $SP^2$ [bb], quare ccpp — rrpp = ccbb — aabb, quæ eſt (§. 191.) æquatio ad ellipſin, in qua ſumma quadratorum ex ſemidiametris æquatur $SR^2$ [cc] adeoque ſemidiameter conjugata ipſius SA [a] erit $\sqrt{cc - aa}$ [AG]. Hinc colligitur problematis conſtructio & demonſtratio geometrica quæ ſequitur.

§. 213. Deſcripto quadrante circuli RGH, quæ ſcala eſt velocitatum corporis cadentis ex dato puncto ſublimi R, ducatur ex centro virium recta SF parallela datæ directioni AP, & æqualis ordinatæ AG ad quadrantem in puncto projectionis: Ellipſis deſcripta centro S, ſemidiametris SA, SF in angulo ASF erit curva quæſita quæ a Projecto percurritur.

Nam poſitis iis quæ ſupra §. 211. dicta ſunt, curvæ ABF proprietas ea eſſe debet ut perpendicula SQ, SP ſint inter ſe reciproce ut ordinatæ ad quadrantem AG, DE: ea vero proprietas

tas pertinet ad conſtructam ellipſim, quod ibi demonſtratur. Ducatur ex centro recta SC parallela tangenti BQ ita ut SB, SC ſint ellipſis diametri inter ſe conjugatæ, quemadmodum SA, SF ſunt ex conſtructione aliæ ejuſdem ellipſis diametri conjugatæ: Conſtat ex conicis ſummam quadratorum $SB^2 + SC^2$ æqualem eſſe ſummæ quadratorum $SA^2 + SF^2$, ſeu (ex conſtructione) $SA^2 + AG^2 = SG^2 = SE^2 = SD^2 + DE^2$: eſt ergo $SB^2 + SC^2 = SD^2 + DE^2$: atqui $SB = SD$; ergo $SC = DE$. Item conſtat ex conicis parallelogramma eidem ellipſi circumſcripta eſſe inter ſe æqualia, atque adeo eorumdem ſubquadrupla, quorum nempe latera ſunt ſemidiametri conjugatæ SA, SF, & SB, SC; ſcilicet rectangulum $SF \times SP$ æquatur rectangulo $SC \times SQ$: quare $SP . SQ :: SC . SF$, ſeu :: DE . AG. Quod ſumpſimus demonſtrandum. Cum itaque deſcripta ellipſis ABF datas velocitatum ac directionum proportiones ſalvet, ea tantummodo a projecto percurratur oportet, non enim plus quam una curva eadem vi centrali (§. 157.) percurri poteſt a corpore ex eodem loco ſecundum eamdem directionem eadem velocitate projecto.

Ex demonſtratis §. 32. conſtat ſublimitatem AR ſemper finitam & determinatam eſſe quantumvis magna ſit data velocitas AG, quam per eam ſublimitatem cadendo corpus acquirere debet, ipſa namque data velocitas projectionis AG finita & determinata ſupponitur, cui proinde æqualis ſemper duci poterit ex centro virium recta SF parallela ad datam directionem AP, quæcumque ſit hæc directio: quare in omni caſu datæ velocitatis & directionis ſemper curva a projecto percurrenda erit ellipſis, quæ in dato angulo SAP ſemidiametris SA, SF deſcribitur: nec proinde alia curva

[§. 157.]

( ſ. 157. ) hac lege vis centripetæ deſcribi poteſt.

§. 214. Apſidium diſtantiæ a centro S, ſeu ſemiaxes ellipſis reperientur ( ſ. 181. ) faciendo in quadrante SRH rectangula $SX \times XY$, & $SZ \times ZT$ inter ſe; & dato rectangulo $SP \times AG$ æqualia. Poſitis autem ( ut ſupra ſ. 212. ) $SR = c$, $SA = a$, $SP = b$, & SX ſeu $SZ = x$, reperietur $xx = \frac{1}{2}cc \pm \frac{1}{2}\sqrt{c^4 - 4bbcc + 4aabb}$. Quod ſi SA (a) æquetur SP (b), hoc eſt angulus SAP ſit rectus, erit $xx = \frac{1}{2}cc \pm \frac{cc - 2aa}{2}$, cujus ſcilicet æquationis duæ radices ſunt $x = a$, & $x = \sqrt{cc - aa}$. Et ſi adhuc ponatur $cc = 2aa$, hoc eſt $SA = AG$ erit $x = a$, & curva a projecto percurrenda (§. 182.) erit circulus.

§. 215. Itaque ſi data ſit altitudo quælibet SR, ſeu punctum ſublime R, deſcribaturque centro S, intervallo SR circulus ſublimitatis RPQT, in eoque inſcribantur quotlibet rectangula abcd, efgh, klmn, quorum rectangulorum maximum eſt quadratum efgh: ſingulis vero rectangulis inſcribantur ellipſes ABCD, EFGH, KLMN, quarum ellipſium maxima eſt circulus EFGH quadrato inſcriptus: conſtat ex dictis. Fig. 63.

Primo. Hujuſmodi ellipſes percurri a corpore in puncto quolibet perimetri elliptici projecto juxta directionem tangentis in eo puncto ea velocitate quam acquireret in eodem puncto ea velocitate quam acquireret in eodem puncto cadendo ex altitudine peripheriæ ſublimitatis RPQT: proinde enim eſt ſive, in el-

lipſi

ipſi exempli cauſſa ABCD, corpus projiciatur in puncto A juxta directionem tangentis Aa, ea velocitate quam acquirit lapſu rectilineo per RA, ſive projiciatur in quolibet alio puncto X juxta directionem tangentis Xx velocitate acquiſita lapſu rectilineo per ZX; eadem enim ellipſis ABCD percurritur, nec niſi poſitione differre poteſt pro diverſitate loci ubi corpus impellitur. Vide §. 178.

Secundo. Si projectio fiat in rectæ RS punctis quibuslibet A, E, K, & angulus projectionis ſit rectus, erunt puncta illa A, E, K vertices ellipſium ſeu apſides orbitarum. Et ſi quidem diſtantiæ SE quadratum ſit dimidium quadrati SR, orbita EFGH erit circularis: ſi autem punctum projectionis A ſit inter punctum ſublime R & punctum E orbitæ circularis, erit apſis A aphelium ſeu apogæum orbitæ ellipticæ ABCD, perigæum vero ſeu perielium erit punctum B cujus diſtantia a centro SB æquatur ordinatæ Ad; Contra vero ſi punctum projectionis K ſit inter orbitam circularem & centrum S, apſis K erit perigæum orbitæ ellipticæ KLMN, apogæi vero diſtantia a centro SL æquatur ordinatæ Kn. Quod ſi SK æquetur Ad, ſeu (quod idem eſt) Kn æquetur SA, ellipſes ABCD, KLMN eædem erunt ſed contrarie poſitæ. Quo igitur puncta projectionum A, K ſunt remotiora a projectione circulari in E, eo ellipſes ſunt oblongiores & acutiores; & ſi projectiones fiant in ipſis punctis R, S, ellipſes erunt acutiſſimæ, ſcilicet rectæ ipſæ RSQ, SPST. In omnibus hiſce ellipſibus ſumma quadratorum ſemiaxium conjugatorum $SA^2 + SB^2$, ſive $SK^2 + SL^2$ eadem ſemper erit, nempe æqualis quadrato altitudinis $SR^2$ unde corpus deci-

decidit ex quiete, proindeque juncta AB, ſive KL æquatur altitudini SR.

Tertio. In punctis quarumcumque orbitarum a centro æquidiſtantibus velocitas eadem eſt, ea nimirum quam acquirit corpus in illis punctis cadendo ex altitudine peripheriæ RBQT: atque adeo in punctis r, s, t, z, in quibus ellipſis exempli cauſſa ABCD ſecat circulum EFGH, velocitas æquatur velocitati qua circulus ille deſcribitur: eruntque in punctis illis rectæ rt, zs diametri conjugatæ æquales.

§. 216. Si velocitas in quovis puncto A corporis deſcribentis ellipſem AF ( fig: 62. ) comparetur cum velocitate in quovis puncto X corporis deſcribentis ellipſem XY ( fig: 63. ), quæ ellipſes circa idem centrum virium utcumque diverſæ ſint, ſitque SF ſemidiameter conjugata reſpectu puncti A in fig: 62, & SY ſemidiameter conjugata reſpectu puncti X in fig: 63; erunt velocitates illæ ut SF ad SY. Nam velocitas in puncto ellipſis A ea eſt quæ acquiritur lapſu rectilineo ex ſublimitate RA, & velocitas in puncto ellipſis X ea quæ acquiritur lapſu ex ſublimitate ZX: Sunt autem hujuſmodi velocitates ( §. 39. ) ut $\sqrt{SR^2 - SA^2}$ ad $\sqrt{SZ^2 - SX^2}$, hoc eſt ( §. 213. ) ut SF ad SY. Ex quo colligitur

Primo: velocitates in circulis eſſe proportionales ſemidiametris, ſeu diſtantiis a communi centro virium. Circulus enim eſt ellipſis cujus ſemidiametri omnes æquales ſunt.

Secundo: velocitatem in quovis puncto A ( fig: 62. ) corporis deſcribentis quamlibet ellipſem AF eſſe ad velocitatem qua deſcribitur circulus in eadem a centro diſtantia SA, ut SF ( ſemidiameter conjugata reſpectu puncti A in

ellipſi ) ad diſtantiam SA . Quod patet etiam ex canone §. *169* : nam ex æquatione ſ. 212, ccpp — rrpp = ccbb — aabb; ſumendo differentias, colligitur proportio $\frac{pdr}{dp}$ : r :: cc — rr . rr, hoc eſt :: $SR^2 - SA^2 . SA^2 :: SF^2 . SA^2$.

ſ. 217. Si ad axem SR deſcribatur curva OVL, cujus quælibet ordinata DV æquetur perpendiculo SQ ducto ex centro S ſuper recta BQ tangente ellipſim in puncto B æquealto ac
Fig. 62. punctum D ; erit (§. 184. ) curva OVL ſcala temporum elementarium motus rectilinei per RS ; & tempus quo motu curvilineo deſcribitur quilibet ellipſis arcus BF, erit ad tempus quo percurritur motu rectilineo quælibet ſpatii RS pars AD, ut area ſeu ſector ellipticus BSF ad dimidium areæ LADV. Inter hujuſmodi vero areas quænam ratio intercedat reperietur deſcribendo ſcalam temporum elementarium HMN quemadmodum in hac eadem velocitatum lege deſcripta eſt ſ. 26 ; ſcilicet quadrantem RGH in puncto quolibet E tangat recta Em, quæ ſemidiametro SH producto occurrat in m, ipſique Sm ponatur æqualis DM, erit hæc ordinata ad curvam HMN ſcalam temporum elementarium motus rectilinei corporis cadentis ex puncto ſublimi R : Porro cum ſupra deſcripta ſit alia curva OVL ſcala item temporum elementarium ejuſdem motus rectilinei, cujus quælibet ordinata DV æquatur perpendiculo SQ : erit ordinata DM unius curvæ ad correſpondentem ordinatam DV alterius curvæ ut Sm ad SQ ſive ut Sm×DE ( hoc eſt $SH^2$ ) ad

SQ×DE,

SQ×DE; hoc eſt (§. 213.) ad SQ×SC, ſeu (§. 215.) ad SX×XY. quod eſt rectangulum ſemiaxium conjugatorum ellipſis ABF: conſtat vero ex conicis quadratum $SH^2$ ad rectangulum ſemiaxium ellipſeos ABF eſſe ut circulus radio SH deſcriptus ad ellipſim ABF: eſt ergo quælibet ordinata DM ſcalæ HMN ad correſpondentem ordinatam DV ſcalæ OVL ut circulus radio SH deſcriptus ad ellipſim ABF; atque adeo ſi duo quælibet ordinatæ DM, AN comprehendant in ſcalis illis areas MDAN, VDAL (quæ æquali proportionalium ordinatarum numero coaleſcunt) erunt hujuſmodi areæ inter ſe in eadem circuli & ellipſeos ratione. Demonſtratum vero eſt §. 27. aream MDAN duplam eſſe ſectoris circularis GSE: ergo ſector GSE eſt ad dimidium areæ LADV ut circulus radio SR deſcriptus ad ellipſim ABC. Hiſce præmiſſis facile colligitur quæſita ratio temporis quo motu curvilineo percurritur quilibet ellipſis arcus BF, ad tempus quo percurritur motu rectilineo quælibet ſpatii RS pars AD; eſt enim ut ſector ellipticus BSF ad dimidium areæ LADV, ſcilicet in ratione compoſita ſectoris elliptici BSF ad ſectorem circularem GSE, & hujus ſectoris ad dimidium areæ LADV, quæ ultima ratio eadem eſt ac circuli radio SR deſcripti ad ellipſim ABF.

§. 218. Hinc tempus quo percurritur quadrans orbitæ ellipticæ xz æquatur tempori lapſus rectilinei per integrum RS ex quiete in puncto ſublimi R uſque ad centrum S: ſunt enim hujuſmodi tempora in ratione compoſita quadrantis elliptici xSz ad quadrantem circularem RSH (ſeu totius ellipſis ABC ad totum circulum ſublimitatis radio SR deſcriptum), & hujus circuli ad ipſam ellipſim ABC, ſcilicet in ratione æqualitatis.

§. 219. Ex quo item colligitur ellipſes omnes
Fig. 36. ABCD, EFGH, KLMN &c. quarum idem eſt punctum ſublime R unde corpus decidit ex quiete, eodem tempore percurri, tempore nimirum quadruplo temporis lapſus rectilinei per RS. Cumque ex demonſtratis §. 31. lapſus omnes rectilinei uſque ad centrum ex quiete in qualibet a centro diſtantia, ſeu ex quolibet puncto ſublimi, ſint iſochroni, inde ſequitur orbitarum omnium ellipticarum circa idem centrum motus periodicos eſſe iſochronos ſeu æquidiuturnos.

## SECTIO II.

*Deſcribuntur curvæ quæ vi centrifuga diſtantiis a centro virium proportionali percurruntur a Projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 220. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejusdem directio,
Fig. 64. velocitas vero ſit AG, quam corpus acquireret in eodem puncto A ſi ex quiete in dato puncto R per ſublimitatem RA moveretur motu rectilineo.

Deſcribatur centro S, ſemiaxe RS, hyperbola RGE (ſitque ad faciliorem conſtructionem æquilatera), quæ in hac lege vis centrifugæ (§. 38.) erit ſcala velocitatum corporis ex quiete in puncto R libere a centro recedentis motu rectilineo per RAD; in quo ſumpto quolibet puncto D deſcribatur centro S intervallo SD arcus circuli DB, qui ſecet curvam quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex virium centro demittatur perpendicularis SQ, quemadmodum SP ſuper data directio-

ne

hic AP : erit (§. 180.) AG. DE :: SQ. SP.
Si ergo ponantur datæ SA = a, SP = b; SR = c; & indeterminatæ SB = SD = r; SQ = p: erit $AG^2$ (aa − cc) :: $DE^2$ (rr − cc) :: $SQ^2$ (pp). $SP^2$ [bb], quare rrpp − ccpp = aabb − ccbb, quæ eſt æquatio ad hyperbolam, in qua ſemidiameter tranſverſa eſt major conjugata [§. 192.] & earumdem quadratorum differentia æquatur cc ſeu $SR^2$, adeoque ſemidiameter conjugata ipſius SA ſeu a erit $\sqrt{aa - cc}$ hoc eſt AG.
Itaque ſi ducatur ex centro virium recta SF parallela datæ directioni AP, & æqualis datæ velocitati AG; hyperbola x AB deſcripta centro S; ſemidiametris SA, SF in angulo ASF, erit curva quæſita quæ a projecto percurritur. Demonſtratio eadem omnino eſt quæ §. 213. mutatis mutandis, hic enim agitur de hyperbola; ibi agebatur de ellipſi.
§. 221. Si punctum R coincidat cum centro virium S; hoc eſt ſi corpus in dato puncto A projiciatur ſecundum datam directionem AP ea velocitate quam acquireret ſi ex quiete in ipſo centro S per ſublimitatem SA motu rectilineo moveretur; in hoc caſu ſcala velocitatum hujus motus rectilinei per SA foret [§. 44.] triangulum ASG. Poſitis ergo iiſdem denominationibus §. præcedentibus, erit AG. DE :: SA (a). SD (r) :: SQ (p). SP (b). Et rp = ab, quæ eſt (§. 192.) æquatio ad hyperbolam æquilateram, quæ conſtruitur centro S, ſemidiametris æqualibus ipſi diſtantiæ SA, in dato angulo directionis SAP. Demonſtratio eadem quæ §. 213. mutatis mutandis &c.

Fig. 65.

§. 222. Demum ſi Projecti velocitas in A adhuc major ſit quam quæ acquiritur per ſublimitatem SA, ita ut a centro S corpus incipiat moveri non quidem ex quiete ſed cum data velocitate SR; ſcala velocitatum motus rectilinei per SA erit in hoc caſu (§. 45. & 46.) hyperbola REG centro S, vertice R deſcripta, poſito nimirum ſemiaxe SR ad angulos rectos ipſi SA, factaque ad majorem facilitatem hyperbola æquilatera. Poſitis ergo iiſdem denominationibus §. 226, erit $AG^2$ $(aa+cc)$. $DE^2$ $(rr+cc)$ :: $SQ^2$ $(pp)$. $SP^2$ $(bb)$. Et $rrpp+ccpp = aabb+ccbb$, quæ eſt (§. 192.) æquatio ad hyperbolam ABx, cujus ſemidiameter transverſa eſt minor conjugata, earumque quadratorum differentia æquatur cc, ſeu $SR^2$; adeoque ſemidiameter conjugata ipſius SA (a) erit $\sqrt{aa+cc}$ $(AG^2)$. Ex quo eadem colligitur problematis conſtructio ac demonſtratio quæ in duobus caſibus ſuperioribus.

Fig. 66.

§. 223. Apſis inferior ſeu perigæum (§. 183.) reperietur faciendo in ſcala velocitatum RGE rectangulum $SX \times XY$ æquale dato rectangulo $AG \times SP$, eritque SX diſtantia verticis hyperbolæ a centro virium, ſcilicet altitudo perigæi. Similia hic adnotari poſſent iis quæ adnotata ſunt in vi centripeta: reperiri etiam ratio temporum motus curvilinei & rectilinei: ſed ea prætermittimus ne otio abuti videamur.

Fig. 64. 65. & 66.

EXEM-

# EXEMPLUM X.

*De motu corporum curvilinea in vi centrali quadratis diſtantiarum a centro virium reciproce proportionali.*

§. 224. CAnones pro vi centripeta (§. 170.) $p = \frac{1}{\sqrt{-S.fdr}}$, & $p = \frac{1}{\sqrt{\pm ab - S.fdr}}$, in hac hypotheſi in qua $f = \frac{1}{rr}$, evadunt $pp = r$, & $pp = \frac{r}{1 \pm abr}$; quarum æquationum prima $pp = r$ eſt (§. 200.) ad parabolam, reliquæ duæ $pp = \frac{r}{1 + abr}$, & $pp = \frac{r}{1 - abr}$ ſunt (§. 199.) ad hyperbolam & ellipſim; exprimunt vero omnes proportionem quæ intercedit inter radios & perpendiculares ductas ex foco ſectionum conicarum: vi ergo centripeta quadratis altitudinum reciproce proportionali ſolæ coniſectiones deſcribi poſſunt.

§. 225. Similiter canones pro vi centrifuga (§. 171.) $p = \frac{1}{\sqrt{S.fdr}}$, & $p = \frac{1}{\sqrt{S.fdr \mp ab}}$, in hac hypotheſi $f = \frac{1}{rr}$ dabunt æquationes $p =$

$\sqrt{-r}$; & $p = \sqrt{\frac{r}{\mp br - 1}}$: quarum æquationum duæ habent radices immaginarias, tertia vero reales $pp = \frac{r}{abr - 1}$, eſtque (§. 201.) ad hyperbolam, in qua radii, & perpendicula ducuntur ex foco exteriore. Hæc una igitur curva hac lege virium centrifugarum deſcribi poteſt.

Sed determinandæ pro varia projectione ſunt hujuſmodi curvæ, & theoria motus curvilinei in celebri hac hypotheſi diligentius pertractanda. Sit igitur

## SECTIO I.

*Deſcribuntur curvæ quæ vi centripeta quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 226. Fuſe explicatum, & demonſtratum eſt §. 48. & ſeq. in hac virium centripetarum lege ſcalas velocitatum tres eſſe poſſe curvas natura diverſas, ſcilicet verſoriam ellipticam, hyperbolam cubicam, & verſoriam hyperbolicam, prout punctum ſublime, unde corpus ex quiete lapſum ſupponitur, diſtat a centro virium intervallo vel finito & aſſignabili, vel infinito, vel (ut ita dicam) negativo; ſive (quod idem eſt §. 61. & 62.) prout velocitas ab externa vi corpori impreſſa in quolibet dato puncto projectionis ea ponitur, quam idem corpus acquireret libero & rectilineo lapſu ex quiete in eodem puncto per ſpatii partem, quæ ſit vel minor, vel æqualis, vel major quam dimidia

midia ejuſdem puncti a centro diſtantia. Triplex ergo caſus diſtinguendus eſt.

## CASUS I.

*Deſcribuntur curvæ, quæ datis puncto & directione projectionis percurruntur a mobili projecto ea velocitate, quam acquirit lapſu libero & rectilineo per quamlibet ſublimitatem finitam & aſſignabilem.*

§. 227. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejuſdem directio, junctaque SA datum ſit in ea producta punctum ſublime R, unde ſi corpus ex quiete libere ad centrum decideret per ſublimitatem RA acquireret in hac lege virium centripetarum datam velocitatem AG qua ponitur in ipſo puncto A projectum eſſe juxta directionem AP. Conſtat ex demonſtratis §. 49. curvam verſoriam RGE vertice R, axe RS, aſymptoto SN deſcriptam eſſe in hac virium centripetarum lege ſcalam velocitatum corporis ex quiete in puncto R libere cadentis ad centrum motu rectilineo per RS ita, ut quadrata velocitatum $AG^2$, $DB^2$ in punctis quibuslibet A, D, ſint inter ſe ut abſciſſæ a vertice R applicatæ ad abſciſſas a centro virium S, ſcilicet ut $\frac{RA}{AS}$ ad $\frac{RD}{DS}$. Si igitur in hoc motu rectilineo per RS ſumatur quodlibet punctum D, centroque S, intervallo SD, deſcribatur arcus circuli DB, qui ſecet curvam quæ à projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex virium centro demittatur perpendicularis Fig. 67.

ris SQ, quemadmodum SP ſuper data directione AP: erit (§. 180.) AG², DE², ſeu $\frac{RA}{AS}$, $\frac{RD}{DS}$ :: SQ², SP².

§. 228. Si ergo ponantur datæ SA = a, SP = b, SR = c, & indeterminatæ SB = SD = r, SQ = p; erit $\frac{RA}{AS}\left(\frac{c-a}{a}\right) \cdot \frac{RD}{DS}\left(\frac{c-r}{r}\right)$ :: SQ² (pp). SP² (bb). quare $\frac{cpp-rpp}{r} = \frac{cbb-abb}{a}$, quæ eſt (§. 199.) æquatio ad ellipſim exprimens proportionem inter radium & perpendiculum quæ ducuntur ex foco. Quoniam vero, ut colligitur ex eodem §. 199. quadratum perpendiculi applicatum ad radium ductum ex foco ellipſeos (hoc eſt $\frac{pp}{r}$) æquatur quartæ parti figuræ applicatæ ad radium ductum ex alio foco, hoc eſt (poſito axe tranſverſo = m, & parametro = n) $\frac{\frac{1}{4}mn}{m-r}$: inde fit ut in inventa æquatione $\frac{cpp-rpp}{r} = \frac{cbb-abb}{a}$, ſeu $c-r \times \frac{pp}{r} = c-a \times \frac{bb}{a}$, ſi loco $\frac{pp}{r}$ ſubſtituatur ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{m-r}$, & loco $\frac{bb}{a}$ ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{m-a}$, eru-

atur

atur $c = m$, ſcilicet SR æqualis axi tranſverſo ellipſeos. Hinc facillima colligitur nobiliſſimi hujus problematis conſtructio & demonſtratio quæ ſequitur.

§. 229. Ex puncto ſublimi R ducatur ſuper data directione AP perpendicularis RC, producaturque uſque ad CF ipſi CR æqualem: tum punctis S, F uti focis, axe tranſverſo æquali ipſi altitudine SR deſcripta ellipſis AB erit curva quæ a projecto percurritur.

Nam poſitis quæ §. 227. dicta ſunt, curvæ AB (quæcumque ea ſit) proprietas ea eſſe debet ut quadrata perpendiculorum SQ, SP ſint inter ſe ut $\frac{RA}{AS}$ ad $\frac{RD}{DS}$: ea vero proprietas pertinet ad conſtructam ellipſim, quod ita demonſtratur.

Cum ex conſtructione ſit $RC = CF$, & anguli ad C recti, erit $AF = AR$, & angulus FAC æqalis angulo RAC ſeu eidem ad verticem poſito SAP; quare (ex conicis) data directio AP tanget in A deſcriptam ellipſim AB. Sumpto deinde in ellipſi quolibet alio puncto B deſcribatur centro S per B arcus circuli BD, qui ſecet rectam SR in D, ductaque tangente BQ, ſuper ea ex focis S, F, demittantur perpendiculares SQ, FI: ductiſque ex puncto B ad focos rectis BS, BF, erit earum ſumma æqualis axi tranſverſo, ſcilicet (ex conſtructione) altitudini SR: Eſt autem $SB = SD$, ergo $BF = DR$: Eſt igitur $\frac{RD}{DS} = \frac{FB}{BS}$, ſeu (ob tangentem ellipſeos BQ, ac ſimilia proinde triangula FBI, SBQ) $= \frac{FI}{SQ}$. Et ob eamdem rationem

RA

$\frac{RA}{AS} = \frac{FA}{AS} = \frac{FC}{SP}$. Eſt igitur $\frac{RA}{AS} . \frac{RD}{DS}$ :: $\frac{FC}{SP} . \frac{FI}{SQ}$, ſive :: $\frac{FC \times SP}{SP^2} . \frac{FI \times SQ}{SQ^2}$ : Atqui (§. 198.) $FC \times SP = FI \times SQ$: Ergo $\frac{RA}{AS} . \frac{RD}{DS}$ :: $SQ^2 . SP^2$. quod ſumpſimus demonſtrandum: Cum itaque deſcripta ellipſis AB datas velocitatum & directionum proportiones ſalvet; ea tantummodo a projecto percurritur; non enim plus quam una curva (§. 157.) eadem vi centrali percurri poteſt a mobili ex eodem loco ſecundum eamdem directionem eadem velocitate projecto.

§. 230. Apſidum diſtantiæ a centro virium, ſive vertices ellipſis facile reperiri poſſunt ex dictis §. 181. itemque ex §. 182. colligitur in quo caſu ellipſis a projecto deſcripta evadat circulus. Verum ſine calculo analytico facillime hæc colliguntur ex ipſa problematis conſtructione allata §. præcedenti. Cum enim in ea determinentur foci ellipſeos S & F, atque axis majoris magnitudo SR; determinatus erit poſitione & magnitudine axis major XZ. qui quidem axis XZ conveniet cum data projectionis directione AC verſus apogæum X quoties ſublimitas RA (ſeu AF) minor ſit diſtantia a centro virium SA: Quod ſi RA (ſeu AF) ſit major quam SA, convenient verſus perigæum Z: ſi demum ſublimitas RA æqualis ſit diſtantiæ SA, axis XZ erit parallelus datæ directioni AP, & punctum projectionis A erit medium ellipſeos ſive extremum axis minoris. quæ omnia ſatis clara per ſe ſunt; nam directio AP tangit curvam

& SA,

& SA, FA ſunt inclinatæ ex focis ad idem punctum A.

§. 231. Si angulus projectionis SAP ſit rectus, focus alter ſeu punctum F erit in ipſa recta SA, punctumque projectionis A erit alter apſidum. Et ſi quidem ſublimitas RA ſit minor altitudine SA, focus F jacebit inter S & A, punctumque projectionis A erit apogæum: quod ſi RA ſit major quam SA, focus F cadet in recta AS producta ultra centrum S, punctumque projectionis A erit perigæum: Si demum ſublimitas RA æqualis ſit altitudini AS, focus F conveniet cum ipſo centro virium S qui eſt alter focus, in quo caſu ellipſis abibit in circulum.

§. 232. Si igitur data ſit altitudo quælibet SR, ſeu punctum ſublime R, deſcribaturque centro S intervallo SR circulus ſublimitatis RZP; conſtat ex dictis. Fig. 68.

Primo: datum eſſe magnitudine axem majorem omnium ellipſium quæ deſcribi poſſunt a corpore quod ex quiete in quocumque peripheriæ illius circuli puncto verſus centrum libere decidat, & in quolibet lapſus ſui puncto cum acquiſita ibi velocitate juxta aliam quamcumdirectionem convertatur: harum enim omnium ellipſium axis major erit altitudini SR æqualis Verum ellipſes eſſe poſſunt valde diverſæ pro diverſa alterius foci poſitione, diſtantiaque a centro virium S; quæ quidem poſitio & diſtantia pendent tum a puncto tum a directione projectionis, videlicet a menſura tum ſublimitatis per quam corpus labitur, tum anguli quem faciunt inter ſe directio projectionis & directio centralis: ita ſi mobile ex puncto Z peripheriæ circuli ſublimitatis decidat verſus centrum lapſu rectilineo per ZX, & velocitate in X acquiſita convertatur ſecundum directionem XN percurret ellipſim XAB, cujus alter focus F eſt ubi

recta

recta XF ſit æqualis ſublimitati XZ efficiatque cum directione XN angulum FXN æqualem angulo projectionis ZXN: quod ſi aut ſublimitas aut angulus projectionis, aut utrumque diverſi ſint, ellipſis erit ſpecie aut ſaltem poſitione diverſa.

Secundo. Quamlibet harum ellipſium percurri à corpore in puncto quolibet perimetri elliptici projecto juxta directionem tangentis in eo puncto ea velocitate quam acquireret in eodem puncto cadendo ex altitudine peripheriæ ſublimitatis RZP; perinde enim eſt in ellipſi exempli cauſſa AXB ſive corpus projiciatur in puncto A juxta directionem tangentis AM ea velocitate quam acquirit lapſu rectilineo per RA, ſive projiciatur in quolibet alio puncto X juxta directionem tangentis XN velocitate acquiſita lapſu rectilineo per ZX, eadem enim ellipſis AXB percurritur, nec niſi poſitione differre poteſt pro diverſitate loci ubi corpus impellitur. vide §. 178.

Tertio. Fiat projectio in rectæ RS punctis quibuslibet A, E, K, & angulus projectionis ſit rectus; erunt puncta illa A, E, K, vertices ellipſium ſeu apſides orbitarum: & ſi quidem ſublimitas ſeu lapſus rectilineus RE ſit dimidium altitudinis RS, orbita ECG erit circularis: ſi autem lapſus rectilineus RA minor ſit quam dimidium altitudinis RS, erit apſis A aphelium ſeu apogæum orbitæ ellipticæ AXB; perigæum vero ſeu perielium erit punctum B, cujus diſtantia a centro virium SB æquatur ſublimitati RA: contra vero ſi lapſus rectilineus RK ſit major quam dimidium altitudinis RS, apſis K erit perielium orbitæ ellipticæ KxL; & aphelium erit punctum L, cujus diſtantia a centro virium LS eſt item æqualis ſublimitati RK. Quod ſi puncta projectionum A, K æquali in-

tervallo diſtant a puncto E projectionis circularis, orbitæ AXB, KxL eædem ellipſes erunt. Quo puncta projectionum A, K, ſunt remotiora a projectione circulari in E, eo diſtantia inter focos erit major, & orbitæ ellipticæ erunt oblongiores & acutiores: & ſi projectiones fiant in ipſis punctis R, & S; hoc eſt ſi in R nulla ſit projectio nullusque lapſus rectilineus, & in S projectio fiat velocitate acquiſita lapſu rectilineo per RS, ellipſes erunt acutiſſimæ ſcilicet rectæ ipſæ RS, SP. Quæ omnia ex dictis ſatis clara ſunt.

Quarto. In punctis quarumcumque orbitarum a centro virium æquidiſtantibus ( ſive in eadem ſive in diverſis orbitis ſumantur ) velocitas eadem eſt, ea nimirum quam acquirit mobile in illis punctis cadendo ex altitudine peripheriæ ſublimitatis RZP: atque adeo in punctis C, D, in quibus ellipſis exempli cauſſa AXB ſecat orbitam circularem ECG, velocitas æquatur velocitati qua orbita ipſa circularis deſcribitur. Erit autem juncta CD axis minor illius ellipſis; nam diſtantiæ a foco CS, DS ſunt dimidium altitudinis SR ſeu axis majoris AB. Itaque orbitæ omnes ellipticæ, quæ æqualem habent axem majorem, habebunt extrema minorum axium in peripheria orbitæ circularis, cujus diameter æquatur eidem axi majori.

§. 233. Si orbitæ ellipticæ æqualem habeant axem majorem exempli cauſſa AXB, KxL, quadrata velocitatum in quibuslibet punctis X, x, ſunt inter ſe ut diſtantiæ ab altero foco XF, xf, applicatæ ad diſtantias a centro virium XS, xS, hoc eſt ut $\frac{XF}{XS}$ ad $\frac{xf}{xS}$: ſiquidem velocitates in punctis illis X, x, æquantur velocitatibus acquiſitis lapſu rectilineo per ſublimitates

ZX,

ZX, zx; ſunt autem harum velocitatum quadrata (§. 49.) ut $\frac{ZX}{XS}$ ad $\frac{zx}{zS}$, ſeu ut $\frac{FX}{XS}$ ad $\frac{fx}{xS}$.

Fig. 69. §. 234. Si vero orbitæ ellipticæ habeant axem majorem inæqualem, exempli cauſſa AXB, axb, quadrata velocitatum in quibuslibet punctis X, x ſunt inter ſe directe ut $\frac{FX}{XS}$ ad $\frac{fx}{xS}$, & reciproce ut axis ab ad axem AB. Siquidem velocitates in punctis illis X, x æquantur velocitatibus (§. 232. num. 2.) acquiſitis lapſu rectilineo per ſublimitates ZX, zx: ſunt autem harum velocitatum quadrata (§. 51.) directe ut $\frac{ZX}{XS}$ ad $\frac{zx}{xS}$ (ſeu $\frac{FX}{XS}$ ad $\frac{fx}{xS}$), & reciproce ut Sz ad SZ (ſeu ab ad AB).

§. 235. In mediis a centro virium diſtantiis, hoc eſt in extremitatibus minorum axium C, c, quadrata velocitatum ſunt reciproce ut axes majores ab ad AB (ſeu reciproce ut diſtantiæ ipſæ mediæ Sc, SC, quæ ſunt dimidia majorum axium): Nam in punctis illis C, c fractiones $\frac{FC}{CS}$, $\frac{fc}{cS}$ ſunt inter ſe æquales; ergo (§. 234.) remanet ſola ratio reciproca majorum axium.

Proindeque orbitæ circulares ECG, ecg, quæ diametrum habeant inæqualem deſcribuntur in hac virium centripetarum lege velocitatibus, quarum quadrata ſunt diametris reciproce proportionalia.

§. 236. Velocitas in quolibet puncto X cujuſcum-

cumque orbitæ ellipticæ AXB eſt ad velocitatem qua deſcribitur circulus in eadem a centro virium diſtantia SX, in ſubduplicata ratione diſtantiæ ab altero foco XF ad dimidium axis majoris AB, Colligitur ex §. 234. Et reperiri etiam poteſt analytice ex æquatione §. 228. ſunt enim hujuſmodi velocitates in ſubduplicata ratione $\frac{pdr}{dp}$ ad r, juxta regulam traditam §. 169.

§. 237. Si ad axem SR deſcribatur curva VTL, cujus quælibet ordinata DV æquetur perpendiculo SQ ducto ex virium centro S ſuper recta BQ tangente orbitam ellipticam in puncto B æque alto ac punctum D, erit (§. 184.) curva VTL ſcala temporum elementarium motus rectilinei per RS. Et tempus quo motu curvilineo deſcribitur quilibet ellipſis arcus AB erit ad tempus quo motu rectilineo percurritur quælibet altitudinis RS pars OD, ut area elliptica ASB arcu ipſo AB & radiis AS, BS ad centrum virium ductis comprehenſa, ad dimidium areæ TODV ſpatio ipſo percurſo OD, ordinatis OT, DV, & arcu TV comprehenſæ: Ratio vero quæ intercedit inter hujuſmodi areas ita reperitur. Fig. 67.

Quadrata perpendiculorum SP, SQ ſunt inter ſe (§. 227.) reciproce ut $\frac{RD}{DS}$ ad $\frac{RA}{AS}$, hoc eſt directe ut $\frac{SA}{AR}$ ad $\frac{SD}{DR}$: Cumque ordinatæ AL, DV ſint æquales perpendicuiis SP, SQ; erunt $AL^2 . DV^2 :: \frac{SA}{AR} . \frac{SD}{DR}$: Curva ergo SVLM eſt [§. 55.] verſoria, cujus vertex S,

 dia-

diameter SR, aſymptota RM. Porro ſi altitudo SR bifariam dividatur in O, centroque S deſcribatur per O arcus circuli OH, punctum H in quo ſecat orbitam ellipticam XAZ erit [ §. 230. ] medium illius orbitæ, ductaque ex eo ſuper axe XZ perpendiculari HK erit ejuſdem orbitæ ſemiaxis minor, cui æquatur perpendiculum ductum ex foco S ſuper tangente in puncto H, hæc quippe tangens eſt parallela axi tranſverſo XZ; proindeque ordinata OT ex puncto medio O ad verſoriam SVTM erit ipſi KH æqualis. Si ergo ſemiaxibus conjugatis OR, OT, deſcribatur ellipſis RTS [ quæ quidem niſi poſitione non differt ab ellipſi XHZ ] ea erit ellipſis genitrix verſoriæ SVTM, adhibita nimirum conſtructione §. 50. hoc eſt ſi ex quolibet hujus ellipſeos puncto m ducatur ordinata mD, & tangens mn, quæ tangens ex tangente ad verticem SN abſcindat Sn, cui ponatur æqualis DV, erit punctum V ad verſoriam SVTM. Ex qua conſtructione conſtat [ §. 36. ] aream quamcumque TODV ordinatis OT, DV, axe OD, & arcu verſoriæ TV comprehenſam, duplam eſſe trilinei elliptici TSm radiis ST, Sm, & arcu Tm comprehenſi.

Itaque tempus quo motu curvilineo percurritur quilibet orbitæ ellipticæ arcur AB erit ad tempus quo percurritur motu rectilineo quælibet altitudinis RS pars OD ut area elliptica ASB arcu ipſo AB & radiis AS, BS ad centrum virium ductis comprehenſa, ad aream ellipticam TSm comprehenſam arcu elliptico Tm (qui ordinatis OT, Dm continetur) & radiis TS, mS ductis ad centrum virium, quod inveniendum ac demonſtrandum aſſumpſimus.

§. 238. Hinc tempus quo percurritur ſemiellipſis XHZ, ſeu quo ex aphelio X corpus tranſit ad perielium Z, æquatur tempori lapſus recti-

ctilinei per integram altitudinem RS axi tranſverſo XZ æqualem ex quiete in puncto ſublimi R uſque ad centrum S. Sunt enim hujuſmodi tempora inter ſe ut æquales areæ ſemiellipticæ XHZ, RTS.

§. 239. Ex quo etiam colligitur, orbitas omnes ellipticas AXB, KxL, quæ æqualem habent axem majorem, æquali tempore periodico percurri; tempore nimirum duplo temporis quo motu rectilineo corpus labitur per altitudinem RS axi majori æqualem; atque adeo eodem tempore periodico percurritur etiam motu æquabili circulus ECG cujus diameter æquatur eidem axi majori. Cujus theorematis placet aliam afferre demonſtrationem a doctiſſimo viro Euſtachio Manfredio cum hæc noſtra ei communicaverimus excogitatam. Fig. 68.

Sit ellipſis AXB & circulus ECG, ſitque AB axis major ellipſis æqualis diametro circuli EG, eidemque æqualis ponatur altitudo SR, unde corpus ex quiete cadere debeat, ut velocitatibus ex lapſu per RA, RE acquiſitis in punctis A, E, directionibus vero ad SR perpendicularibus projectum eas orbitas percurrat. Sumantur deinde particulæ infinite parvæ in ellipſi Aa, & in circulo Ee eodem ſive æquali tempore percurſæ, ducanturque ad centrum virium Sa, Se. Quoniam igitur ſpatiola Aa, Ee eodem minimo tempore deſcripta ſunt, erunt inter ſe ut velocitates in punctis A, E. Sunt autem (§. 49.) quadrata velocitatum in punctis A, E [cum utrumque mobile ex eodem puncto ſublimi R lapſum ponatur] ut $\frac{RA}{AS}$ ad $\frac{RE}{ES}$, hoc eſt (poſito axe tranſverſo $= 2c$, & $RA = a$) Fig. 70.

ut $\frac{a}{2c-a}$ ad $\frac{c}{c}$, ſive ut a ad 2c—a: ergo velo-
citates in A, E, hoc eſt ſpatiola Aa, Ec erunt inter ſe ut $\sqrt{a}$ ad $\sqrt{2c-a}$. Quibus poſitis cum anguli SAa, SEe ſint recti, latera infinite parva Aa, Ee erunt altitudines triangulorum SAa, SEe, ac proinde hujuſmodi triangula erunt inter ſe ut SA×Aa ($\overline{ac-a} \times \sqrt{a}$) ad SE×Ee ($c \times \sqrt{2c-a}$), hoc eſt ut $\sqrt{2ac-aa}$ ad c. atqui etiam area elliptica AXB ad aream circularem ECG eſt ut $\sqrt{2ac-aa}$ (qui ellipſeos eſt ſemiaxis minor) ad c (qui eſt ſemiaxis major), eſt enim diameter circuli æqualis axi majori ellipſeos. Ergo triangula infinite parva ſeu areæ ASa, ESe ſunt inter ſe ut ellipſis ad circulum: & alternando area ASa ad ellipſim (ſcilicet tempus per Aa ad tempus per totam ellipſim) ut area ESe ad circulum (ſcilicet ut tempus per Ee ad tempus integræ revolutionis circularis): Sunt autem ex ſuppoſitione tempora per Aa, Ee æqualia; ergo tempora periodica reſolutionis ellipticæ & circularis æqualia ſunt Q. E. D.

§. 240. Quod ſi orbitæ ellipticæ, quæ circa idem centrum virium percurruntur axem majorem habeant inæqualem, ſeu orbitæ circulares inæqualem diametrum: erunt quadrata temporum periodicorum ut cubi axium majorum, ſive ſemiaxium, ſeu mediarum diſtantiarum a centro virium; & in circulis ut cubi ſemidiametrorum. Siquidem in unaquaque ellipſi vel circulo tempus periodicum eſt duplum (§. 238) temporis lapſus rectilinei per altitudinem di-

me-

metro circuli; vel axi majori ellipſeos æqualem. In lapſu autem rectilineo quadrata temporum ſunt ut cubi altitudinum unde ex quiete corpora labuntur uti §. 57. demonſtratum eſt.

## CASUS II.

*Deſcribitur Curva, quæ datis puncto & directione projectionis percurritur a mobili projecto ea velocitate quam acquireret lapſu rectilineo ex infinita diſtantia, ſeu [ quod idem eſt ] quam acquireret lapſu ex quiete in eodem puncto projectionis uſque ad dimidiam à centro diſtantiam:*

§. 341. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejuſdem directio; velocitas vero qua in dato puncto A ſecundum datam directionem AP mobile projitur ſit ea quam idem mobile in eadem virium centripetarum lege acquireret lapſu rectilineo ex puncto ſublimi R infinite alto uſque ad punctum A per infinitam ſublimitatem RA, ſeu (quod idem eſt §. 61 & 62.) quam acquireret lapſu rectilineo ex quiete in eodem puncto A per AG dimidiam datæ altitudinis AS. Conſtat ex demonſtratis §. 63. in hac hypotheſi lapſus rectilinei ex infinita diſtantia quadrata velocitatum in punctis quibuslibet A, D eſſe inter ſe reciproce ut diſtantiæ a centro SD, SA. Si ergo in hoc motu rectilineo per infinitam altitudinem RS ſumatur quodlibet punctum D ſive ſupra ſive infra A, centroque S intervallo SD deſcribatur arcus circuli DB, qui ſecet curvam quæ a projecto percurritur [ quæcumque ea ſit ] in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex Fig. 71.

 vi-

virium centro demittatur perpendicularis SQ, quemadmodum SP ſuper data directione AP, erit (§. 180.) quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in D, hoc eſt SD . SA :: $SQ^2$ . $SP^2$.

§. 242. Itaque ſi ponantur datæ SA = a, SP = b, & indeterminatæ SB = SD = r, SQ = p, erit SD (r). SA (a) :: $SQ^2$ (pp). $SP^2$ (bb). Quare app = bbr, ſeu $pp = \frac{bbr}{a}$, quæ eſt æquatio ad parabolam exprimens proportionem inter radium & perpendiculum quæ ducuntur ex foco uti §. 200. demonſtratum eſt, ex quo etiam conſtat $\frac{bb}{a}$ eſſe quartam partem parametri, hoc eſt diſtantiam foci a vertice parabolæ. Hinc colligitur conſtructio & demonſtratio quæ ſequitur.

§. 243. Centro S intervallo SA deſcribatur circulus AHK, qui ſecet datam directionem AP in H, junctaque SH demittatur ſuper ea normalis PZ ex puncto P ubi datæ directioni AP occurrit normalis SP ducta ex virium centro S, Parabola foco S, vertice Z deſcripta erit curva quæ a projecto percurritur.

Primum enim deſcriptam parabolam tranſire per punctum A, atque contingere datam directionem AP, patet ex eo quod SA æquatur SH, adeoque AP = PH, & (ducta AE ad SH perpendiculari) EZ = ZH, atque AE dupla PZ. Eſt ergo $AE^2 = 4PZ^2 =$ (ob triangulum rectangulum SPH) $4SZ \times ZH = 4SZ \times ZE$: atqui 4SZ æquatur parametro, & ZE eſt abſciſſa a vertice Z; ergo AE eſt ordinata ad parabolam. Cumque EZ æquetur ZH, erit AH tangens parabolæ in puncto A.

Hanc

Hanc vero parabolam a projecto deſcribi in caſu noſtro patet ex eo quod, poſitis quæ §.241 dicta ſunt, curvæ ZAB (quæcumque ea ſit quæ à projecto percurritur) proprietas ea eſſe debet ut quadrata perpendiculorum SQ SP ſint inter ſe directæ ut SD ſeu SB ad SA. Eam vero proprietatem eſſe deſcriptæ parabolæ conſtat ex conicis: Nam $SQ^2 = SB \times SZ$, & $SP^2 = SA \times SZ$: quare $SQ^2 . SP^2 :: SB \times SZ . SA \times SZ :: SB . SA$. Ergo &c.

§.244. Poteſt hic adnotari allatam hanc problematis conſtructionem in ſecundo hoc caſu non differre a conſtructione problematis in primo caſu quam attulimus §.229. Siquidem facto angulo FAC æquali angulo projectionis SAH, alter ellipſeos focus F eſſe debet illud rectæ AF punctum ubi ei occurrit perpendicularis quæ ex puncto ſublimi R ducitur ſuper directione AC: Cum vero in hoc ſecundo caſu punctum ſublime R diſtet infinite a puncto projectionis A, etiam concurſus ille ſeu focus F ab eodem puncto A infinite diſtabit, rectaque SF, quæ focum S cum altero foco F conjunget erit rectæ AF parallela, ac focorum diſtantia infinita. In hoc ergo caſu ellipſis abibit in parabolam, cujus axis HSF eſt parallelus rectæ AF, adeoque angulus SHA æqualis angulo externo & oppoſito FAC, ſeu (ex conſtructione) angulo SAH, & SH = SA quemadmodum factum eſt §. præcedenti.

§.245. Si angulus projectionis SAP ſit rectus, recta AP tanget in A circulum AK, & puncta H, P, Z, convenient in A, eritque A vertex parabolæ. Si angulus projectionis SAP ſit nullus, hoc eſt ſi mobile per infinitam altitudinem RAS ad centrum uſque decidat, punctum H cadet in h, & puncta P, Z convenient in S, eritque S focus ſimul & vertex

parabolæ, quæ proinde in hoc caſu evadet in rectam infinitam SAR.

§. 246. Quadrata velocitatum in punctis quibuslibet A, B erunt inter ſe reciproce ut altitudines SB, SA, uti facile ex dictis colligitur. Item ex dictis, & ex canone tradito §. 169. reperitur, quadratum velocitatis in quolibet parabolæ puncto B duplum eſſe quadrati velocitatis qua deſcribitur circulus in eadem a centro virium diſtantia SB. Facile etiam ex dictis reperitur ratio temporum motuum curvilineorum per quoslibet parabolarum arcus: itemque ratio temporum motus curvilinei cum motu rectilineo comparati, quemadmodum in primo caſu factum eſt.

## CASUS III.

*Deſcribuntur curvæ, quæ datis puncto & directione projectionis percurruntur a mobili projecto ea velocitate, quam acquireret lapſu rectilineo ex quiete in eodem puncto projectionis per ſpatium quod ſit majus quam dimidia ejuſdem puncti a centro diſtantia.*

§. 247. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejuſdem directio, velocitas vero ſit ea quam idem mobile in eadem virium centripetarum lege acquireret lapſu libero & rectilineo ex quiete in eodem puncto A per ſpatium AG, quod majus ſit quam dimidium datæ altitudinis AS. Tum producta AS ultra centrum S, reperiatur in ea punctum R modo a nobis §. 61. & 62. explicato, videlicet fiat GA—GS. GA : : AS. AR. Conſtat ex monſtratis §. 67. in motu rectilineo corporis

Fig. 72.

cum

ctum dicta velocitate in puncto A impulſi verſus centrum AS aut contraria directione per AD, ſcalam velocitatum eſſe verſoriam hyperbolicam ita nimirum ut quadrata velocitatum in punctis quibuslibet A, D, ſint ut abſciſſæ a puncto R applicatæ ad abſciſſas a centro virium S, ſcilicet ut $\frac{RA}{AS}$ ad $\frac{RD}{DS}$. Si igitur in hoc motu rectilineo ſumatur quodlibet punctum D, centroque S, intervallo SD deſcribatur arcus circuli DB, qui ſecet curvam, quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B ubi eam tangat recta BQ ſuper qua ex virium centro demittatur normalis SQ quemadmodum SP ſuper data directione AP; erit (§. 180.) quad. velocitatis in A ad quad. velocitatis in D, hoc eſt $\frac{RA}{AS} . \frac{RD}{DS} :: SQ^2 . SP^2$.

§. 248. Si ergo ponantur datæ SA = a, SP = b, SR = c, & indeterminatæ SB = SD = r, SQ = p, erit $\frac{RA}{AS} \left(\frac{c+a}{a}\right) . \frac{RD}{DS} \left(\frac{c+r}{r}\right) :: SQ^2 (pp) : SP^2 (bb)$; quare

$$\frac{cpp+rpp}{r} = \frac{cbb+abb}{a},$$ quæ eſt (§. 199.) æquatio ad hyperbolam exprimens proportionem inter radium & perpendiculum quæ ducuntur ex foco. Quoniam vero, uti colligitur ex eodem §. 199, quadratum perpendiculi applicatum ad radium ductum ex foco (hoc eſt $\frac{pp}{r}$) æquatur quartæ parti figuræ applicatæ ad

ad radium ductum ex alio foco, hoc eſt (poſito axe tranſverſo $= m$, & parametro $= n$)

$$= \frac{\frac{1}{4}mn}{m+r},$$

inde fit ut in inventa æquatione

$$\frac{cpp+rpp}{r} = \frac{cbb+abb}{a},$$

ſeu

$$\overline{c+r} \times \frac{pp}{r} = \overline{c+a} \times \frac{bb}{a},$$

ſi loco $\frac{pp}{r}$ ſubſtituatur ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{m+r}$, & loco $\frac{bb}{a}$ ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{m+a}$, eruatur $a = m$, ſcilicet SR æqualis axi tranſverſo hyperbolæ. Hinc colligitur problematis conſtructio & demonſtratio quæ requiritur.

§. 249. Ex puncto R ducatur ſuper data directione AP perpendicularis RC, producaturque uſque ad CF ipſi CR æqualem, tum punctis S, F uti focis, S quidem interno, & F externo, ac axe tranſverſo æquali rectæ SR deſcripta hyperbola AB erit curva quæ a projecto percurritur.

Hæc conſtructio eadem prorſus eſt ac ea quam in primo caſu §. 229. dedimus pro orbita elliptica. Eadem quoque eſt demonſtratio, quam ideo prætermittimus quod legi poteſt loco citato ad hanc figuram 72. applicata, non enim differt niſi in eo quod axis tranſverſus in ellipſi æquatur ſummæ, in hyperbola vero differentiæ rectarum quæ inclinantur a focis ad idem curvæ punctum.

§. 250. Quæ in primo caſu adnotata ſunt de varia poſitione, magnitudine, ac ſpecie orbita-

rum

rum ellipticarum, hic etiam adnotari poſſunt de hyperbolis quæ a projecto percurruntur pro varia velocitate, directione, ac puncto projectionis. Similiter de velocitatibus in diverſis orbitarum hyperbolicarum punctis, deque ratione temporum, quibus varii hyperbolarum arcus percurruntur, ſive inter ſe, ſive cum motu rectilineo in eadem hypotheſi comparentur. Facile enim hæc omnia curioſus lector reperiet ſi methodo a nobis in primo caſu adhibita utatur iis quæ de motu rectilineo in hac virium centralium lege exemplo III. ad Propoſ. tertiam fuſe explicata & demonſtrata ſunt.

## SECTIO II.

*Deſcribuntur curvæ, quæ vi centrifuga quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a Projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 251. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejusdem directio, velocitas vero ſit ea quam mobile acquireret in eodem puncto A ſi ex quiete in dato quodam puncto R per RA in eadem lege vis centrifugæ motu rectilineo libere moveretur. Conſtat ex demonſtratis §. 71. in motu rectilineo corporis ex quiete in puncto R a centro virium centrifugarum S recedentis per RAD ſcalam velocitatum eſſe verſoriam hyperbolicam, ita nimirum ut quadrata velocitatum in punctis quibuslibet A, D, ſint inter ſe ut abſciſſæ a puncto R applicatæ ad abſciſſas a centro virium S, ſcilicet ut $\frac{RA}{AS}$ ad $\frac{RD}{DS}$. Si ergo in Fig. 73.

hoc

hoc motu rectilineo ſumatur quodlibet punctum D, centroque S; intervallo SD deſcribatur arcus circuli DB; qui ſecet curvam quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B, ubi eam tangat recta BQ ſuper qua demittatur ex virium centro perpendiculum SQ, uti SP ſuper data directione AP; erit (§. 180.) quad: velocitatis in A ad quad: velocitatis in D; hoc eſt $\frac{RA}{AS} \cdot \frac{RD}{DS} :: SQ^2 : SB^2$.

§. 252. Igitur ſi ponantur datæ $SA = a$; $SP = b$, $SR = c$; & indeterminatæ $SD = SB = r$; $SQ = p$, erit $\frac{RA}{AS}\left(\frac{a-c}{a}\right) : \frac{RD}{DS}\left(\frac{r-c}{r}\right) :: SQ^2\ (pp) : SP^2\ (bb)$. quare $\frac{rpp - cpp}{r} = \frac{abb - cbb}{a}$; quæ eſt (§. 201.) æquatio ad hyperbolam exprimens rationem inter radium & perpendiculum quæ ducuntur ex foco exteriore. Quoniam vero, uti colligitur ex eodem §. 201, quadratum perpendiculi applicatum ad radium ductum ex foco (hoc eſt $\frac{pp}{r}$) æquatur quartæ parti figuræ applicatæ ad radium ductum ex alio foco, hoc eſt (poſito axe tranſverſo $= m$, & parametro $= n$) $\frac{\frac{1}{4}mn}{r-m}$; inde fit ut in inventa æquatione,

tione $\frac{pp}{r} \times \overline{r-c} = \frac{bb}{a} \times \overline{a-c}$, ſi loco $\frac{pp}{r}$ ſubſtituatur ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{r-m}$, & loco $\frac{bb}{a}$ ejus valor $\frac{\frac{1}{4}mn}{a-m}$, eruatur $c=m$, ſcilicet SR æqualis axi tranſverſo hyperbolæ. Hinc ſimillima præcedenti colligitur problematis conſtructio, videlicet.

§. 253. Ex puncto R ducatur ſuper data directione AP perpendicularis RC, producaturque uſque ad CF ipſi CR æqualem; tum punctis S, F uti focis, S quidem externo, & F interno, axe tranſverſo æquali rectæ SR deſcripta hyperbola ZAB erit curva quæ a projecto percurritur.

Demonſtratio eadem omnino eſt quæ §. 229. mutatis mutandis, hic enim agitur de hyperbola, ibi agebatur de ellipſi.

§. 254. Similia hic adnotari poſſunt iis quæ adnotata ſunt in vi centripeta de varia poſitione, magnitudine, ac ſpecie hyperbolarum, pro varia velocitate, directione, ac puncto projectionis: reperiri etiam ratio temporum motus curvilinei ac rectilinei quemadmodum in ſuperioribus factum eſt.

EXEM.

# EXEMPLUM II.

*De motu corporum curvilineo in vi centrali cubis diſtantiarum a centro virium reciproce proportionali.*

§. 255. **F**Acile eſt canones generales §. 170. & 171. quemadmodum in exemplo ſuperiore factum eſt, ad hanc hypotheſim applicare in qua ponitur, $\rho f = \frac{1}{r^3}$; adeoque $S. fdr = \frac{-1}{2rr}$: Non igitur in æquationibus generalibus curvarum, quæ in hac virium centralium lege deſcribuntur, reperiendis diutius immoramur; ſed ad determinandas pro varia projectione hujuſmodi curvas ſtatim veniemus. Idque fuſius ac diligentius perſequemur tum ob argumenti elegantiam quod a Nevvtono & Jo: Bernoullio tractatum eſt, tum quia hoc exemplo clarius patebit quam orbitarum diverſitatem inducat varia projectionis aut velocitas aut directio, uti §. 161. & 185. dictum eſt, quamque analogiam habeant inter ſe motus omnes qui ab eadem virium centralium lege oriuntur. Sit igitur:

# SECTIO I.

*Deſcribuntur curvæ, quæ vi centripeta cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a Projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 256. DEmonſtratum eſt exemplo IV. ad Prop: tertiam, in hac virium centripetarum lege corpus libere cadendo motu rectilineo ex quiete in quolibet puncto A uſque ad centrum virium S percurrere omnes gradus velocitatis in infinitum: atque adeo ſupponi poſſe in dato puncto A ea velocitate projectum eſſe quam acquireret libere cadendo ex quiete in eodem puncto A uſque ad datum punctum G. Quod ſi fiat ut differentia quadrati SA a duplo quadrati SG ad ipſum quadratum SG ita quadratum SA ad quadratum SR, erit (§. 81.) AR ſublimitas, & punctum ſublime R locus unde corpus cadere debet ex quiete ut acquirat in A datam illam velocitatem qua projectum ſupponitur. Porro ſi $SA^2$ minus ſit quam $2SG^2$ (§. 82.) altitudo SR ad partes ſuperiores A ſumenda erit, & ſublimitas AR erit finita & aſſignabilis: Si vero $SA^2 = 2SG^2$, ſublimitas AR erit infinita: Si demum $SA^2$ ſuperet duplum quadrati SG, ad alteras centri S partes ſumenda erit ipſa SR. In quo triplici caſu ſcalæ velocitatum tres erunt curvæ diverſæ. Triplex ergo hic caſus, ſicut in exemplo præcedenti, diſtinguendus eſt. Fig. 74.

CA-

# CASUS I.

*Deſcribitur curva, quæ datis puncto & directione projectionis percurritur a mobili projecto ea velocitate quam acquireret lapſu rectilineo per quamlibet ſublimitatem finitam & aſſignabilem.*

§. 257. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP directio, junctaque SA datum ſit in ea producta punctum ſublime R unde ſi corpus ex quiete ad centrum decideret per ſublimitatem RA acquireret in hac lege virium datam velocitatem qua ponitur in ipſo puncto A projectum eſſe. Conſtat ex demonſtratis §. 73. quod ſi centro S radio SR deſcribatur quadrans circuli RCE, velocitates in punctis quibuslibet A, D corporis motu rectilineo cadentis ex quiete in R ſunt inter ſe ut ordinatæ ad quadrantem ex punctis illis applicatæ ad abſciſſas a centro S, hoc eſt ut $\frac{AC}{AS}$ ad $\frac{DF}{DS}$. Si igitur in hoc motu rectilineo per RS ſumatur quodlibet punctum D, centroque S, intervallo SD deſcribatur circulus DB, qui ſecet curvam quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex virium centro demittatur normalis SQ, uti SP ſuper data directione AP; erit (§. 180) $\frac{AC}{AS} . \frac{DF}{DS} :: SQ . SP.$, ſive ſumendo quadrata omnium terminorum $\frac{SR^2 - AS^2}{SA^2} . \frac{SR^2 - SD^2}{SD^2} :: SQ^2 . SP^2.$

Fig. 74.

§. 258.

§. 258. Si ergo ponantur datæ $SA = a$, $SP = b$, $SR = c$, & indeterminatæ $SB = SD = r$, $SQ = p$, erit $\frac{cc - aa}{aa} . \frac{cc - rr}{rr} :: pp . bb.$, quare $\frac{ccpp - rrpp}{rr} = \frac{ccbb - aabb}{aa}$. Quod ſi fiat SA (a). SP (b) :: AC ($\sqrt{cc - aa}$). MN; quoniam SP non eſt major quam SA, non erit MN major quam AC, ac proinde ordinari poterit in portione quadrantis ARC: ſit ergo ordinata $MN = \frac{b\sqrt{cc - aa}}{a}$, quæ brevitatis cauſſa ponatur $= n$, eritque $\frac{ccpp - rrpp}{rr} = nn$, ſeu $pp = \frac{nnrr}{cc - rr}$. Quænam vero ſit curva quæ hanc habeat æquationem & quomodo conſtrui poſſit analyſi a nobis §. 180. & 175. indicata inveſtigandum eſt.

Ducatur radius Sg infinite proximus radio SB, centroque S intervallo Sg deſcribatur arcus circuli gl, qui ponatur $= dy$, & $Bl = dr$, eritque $Bg^2$ ($dr^2 + dy^2$). $gl^2$ ($dy^2$) :: $SB^2$ ($rr$). $SQ^2$ ($pp$) $= \frac{rrdy^2}{dr^2 + dy^2}$: quare ſuperior æquatio evadet $\frac{rrdy^2}{dr^2 + dy^2} = \frac{nnrr}{cc - rr}$,

ex qua colligitur $dy = \frac{ndr}{\sqrt{cc - nn - rr}}$. Eſt autem $cc - nn = SR^2 - MN^2 = SM^2$; itaque poſito brevitatis cauſſa $SM = m$, erit $dy = \frac{ndr}{\sqrt{mm - rr}}$: & deſcripto centro S, intervallo SM, circulo KMV, productiſque SB, Sg ad V, i, qui abſcindant arcus MV, Mi $= z$, erit SB (r). SV (m) :: lg (dy). Vi (dz) $\frac{mdy}{r} = \frac{mndr}{r\sqrt{mm - rr}}$, ac proinde ſector circularis infinite parvus $VSi = \frac{mdz}{2} = \frac{nmmdr}{2r\sqrt{mm - rr}}$, ſive $= \frac{n}{m} \times \frac{m^3 dr}{2r\sqrt{mm - rr}}$.

Porro hoc differentiale $\frac{m^3 dr}{2r\sqrt{mm - rr}}$ reduci poteſt ad differentiale ſectoris hyperbolici ſupponendo $r = \frac{mm}{\sqrt{mm + xx}}$ (ut creſcente r, decreſcat alia aſſumpta indeterminata x), reperitur enim $dr = \frac{mmxdx}{\overline{mm + xx}^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{m^3 dr}{2r\sqrt{mm - rr}}$

De-

$= \frac{mmdx}{2\sqrt{mm+xx}}$. Deſcripta autem centro S, vertice M hyperbola æquilatera MY, cujus ordinata YX $= x$, erit (§. 45.) $\frac{mmdx}{2\sqrt{mm+xx}}$ differentiale ſectoris hyperbolici MSY.

Quoniam igitur ſector circularis infinite parvus VSi æquatur (ut ſupra dictum eſt) $\frac{n}{m} \times \frac{m^3 dr}{2r\sqrt{mm-rr}}$, æquale etiam erit $\frac{n}{m} \times \frac{mmdx}{2\sqrt{mm+xx}}$; atque adeo horum differentialium ſummæ æquales erunt, ſcilicet ſector circularis MSV (vel ſolus, vel auctus aut mulctatus ſectore aliquo conſtanti MSO juxta calculi integralis regulas) æqualis erit $\frac{n}{m} \times$ S. $\frac{mmdx}{2\sqrt{mm+xx}}$, hoc eſt $\frac{n}{m}$ in ſectorem hyperbolicum MSY.

Porro ſupra poſuimus r (SB) $= \frac{mm}{\sqrt{mm+xx}}$: eſtque (ducta ex puncto Y hyperbolæ tangente YD) SD $= \frac{SM^2}{SX} = \frac{mm}{\sqrt{mm+xx}}$: ergo ra-

M 2 dius

dius SB æquatur rectæ SD, quam ex hyperbolæ axe abſcindet a centro tangens ducta ab extremitate aſſumpti ſectoris hyperbolici.

Si ergo fiat ut SM ( m ) ad MN ( n ) ita quilibet aſſumptus ſector hyperbolicus MSY ad ſectorem circularem OSV, ducaturque ex Y tangens hyperbolæ YD, atque in SV ſumatur recta SB æqualis SD, erit B punctum curvæ quæſitæ.

Adjunximus vero ſectori circulari indeterminato MSV ſectorem conſtantem OSM, quandoquidem curva tranſire debet per datum punctnm projectionis A, ubi ſector circularis MSV æquatur nihilo, ſector autem hyperbolius MSY evadit MSL ( ducta nimirum ex A tangente hxperbolæ AL, junctaque LS ), ac proinde fieri debet ut SM ad MN ita ſector hyperbolicus MSL ad circularem MSO.

Synthetica ergo conſtructio ac demonſtratio hujus problematis ita ſe habet.

§. 259. Centro S per datum punctum ſublime R deſcribatur quadrans circuli RCE, in quo ex dato puncto projectionis A ordinetur AC; ductaque ex centro S ſuper data directione AP perpendiculari SP, fiat SA . SP : : AC . MN; quæ eidem quadranti ordinetur intra portionem ARC ( ſiquidem MN non erit major AC quoniam SP non eſt major SA ) : tum centro S, intervallo SM deſcribatur circulus MVK, eodemque centro S, vertice M deſcribatur hyperbola æquilatera MLY, quam in L tangat recta AL ducta ex dato puncto projectionis A; junctaque SL, fiat ut SM ad MN ita ſector hyperbolicus MSL ad ſectorem circularem MSO ( poteſt quarta hæc proportionalis eſſe integer circulus MKV, aut duplum vel triplum &c. integri circuli cum adjuncto etiam ſectore MSO) qui applicetur radio SM verſus partes H contrarias perpendiculo SP. Quibus poſitis, ducatur

tur ex quolibet hyperbolæ puncto Y tangens YD axi occurrens in D, & recta ad centrum YS, fiatque ſemper ſector hyperbolicus MSY, ad ſectorem circularem OSV in ratione conſtanti SM ad MN, & in radio SV ſumatur SB æqualis SD: Dico puncta omnia B ita determinata reperiri in curva quæſita quam mobile deſcribit.

§. 260. Siquidem poſitis quæ §. 257. dicta ſunt; curvæ AB proprietas ea eſſe debet, ut perpendicula SQ, SP ſint inter ſe ut $\frac{AC}{AS}$ ad $\frac{DF}{DS}$: ea vero proprietas pertinet ad curvam ſupra deſcriptam, quod ita demonſtratur.

Ducatur radii quicumque infinite proximi SBV, Sgi, centroque S deſcribantur per B & g arcus BD, glt, qui ſecent rectam SA in punctis D, t, ex quibus ducantur tangentes hyperbolæ infinite proximæ DY, tr; & ex punctis contactus Y, r ordinentur ad hyperbolam YX, rs, jungaturque ad centrum SY, Sr: Erit ergo ex conſtructione SM ad MN ut ſector hyperbolicus MSY ad circularem OSV; itemque ut ſector MSr ad OSi, ac proinde ut eorumdem ſectorum differentiæ, nimirum ut YSr ad VSi. Eſt autem (ductis Ye perpendiculari ad sr, & Sp ad tangentem YD productam) ſector hyperbolicus infinite parvus YSr dimidium rectanguli Yr × Sp, ſeu (ob ſimilia triangula SDp, rYe) rectanguli re × SD: itemque ſector circularis infinite parvus VSi dimidium rectanguli Vi × SV: ergo SM . MN : : re × SD : Vi × SV., ac proinde er. Vi : : SM × SV. MN × SD, ſive : : SM² . MN × SD.

His poſitis ducatur ſubtangens SZ perpendicularis radio SB; eritque SB. SZ :: BI. Ig. Eſt vero ratio BI ad Ig compoſita ex quatuor rationibus Pri: BI ſeu Dt ad Xs. Sec: Xs ſeu Ye ad er. Ter: er ad Vi. & demum Quar: Vi ad Ig. quarum rationum prima Dt ad Xs ( ob $XS \times SD = sS \times St$, & ablato $XS \times St$ communi, $XS \times Dt = Xs \times St$ ) eadem eſt quæ St ſeu SD ad SX, ſive $SD^2$ ad $SM^2$ Sec: ratio Ye ad er eadem eſt quæ DX ad XY, ſeu XY ad XS, ſive MT ad MS, ſeu ( ob SX, SM, SD continue proportionales, adeoque quadrando, & dividendo $\overline{SX^2 - SM^2}$ ( $XY^2$ ). $\overline{SM^2 - SD^2}$ ( $DH^2$ ) :: $SX^2$. $SM^2$. $XY^2$. $MT^2$ unde $DH = MT$ ) DH ad SM. Ter: ratio er ad Vi ( ut ſupra demonſtratum eſt ) eadem quæ $SM^2$ ad $MN \times SD$. Quar: demum ratio Vi ad Ig eadem quæ SV ad SB, ſeu SM ad SD. quæ quatuor rationes ordine diſpoſitæ hæ ſunt $SD^2$. $SM^2$, DH. SM, $SM^2$. $MN \times SD$, SM. SD: quæ componunt rationem DH. MN: Eſt ergo DH ad MN ut radius SB ad ſubtangentem SZ. quare quadrando terminos & componendo erit $\overline{MN^2 + DH^2}$ ( ſive $SN^2 - SM^2 + SH^2 - SD^2$, hoc eſt $SF^2 - SD^2$, ſeu $DF^2$ ) ad $MN^2$ :: $\overline{SB^2 + SZ^2}$ ( ſive $BZ^2$ ) ad $SZ^2$. Eſt ergo DF. MN :: BZ. SZ, ſeu :: SB. SQ. Eodem modo demonſtrabitur AC. MN :: SA. SP, quod etiam in conſtructione problematis factum fuit. Cum igitur ratio SQ ad SP compoſita ſit ex tribus rationibus 1. SQ ad SB ( hoc eſt MN ad DF ). 2. SB ſeu SD ad SA. Et 3. SA ad SP ( hoc eſt AC ad MN ); quæ tres rationes reducuntur ad duas AC ad DF, & SD ad SA.

Erit ergo SQ. SP :: $\frac{AC}{AS}$. $\frac{DF}{DS}$. Quod ſumpſimus demonſtrandum. §. 261.

§. 261. Si ex quolibet hyperbolæ puncto y inter L & M ducatur tangens yd ( quæ axi occurret inter A & M ) itemque recta ad centrum yS ( quæ abſcindet ſectorem MSy minorem ſectore illo quem ab initio ſumpſimus MSL: fiatque ſemper in ratione conſtanti SM ad MN, ita ſector hyperbolicus MSy ad circularem OSu ( qui proinde ſector minor erit ſectore illo conſtanti, quem initio poſuimus OSM ) & in ipſa Su ſumatur Sb = Sd; hocque modo curva BA continuetur uſque ad punctum O; demonſtrabitur ( eodem modo ac demonſtratum eſt in alia curvæ parte AB ) radium quemlibet Sb ad ſuam ſubtangentem eſſe ut ordinata dh in circulo MHK ad conſtantem MN: eumdem vero radium Sb ad normalem ductam ex centro S ſuper tangente in eodem puncto b, eſſe ut ordinata df in circulo RNE ad eamdem conſtantem MN. Eodem proinde modo demonſtrari poteſt, quod ſi mobile in puncto A cum data illa velocitate quam acquireret cadendo ex quiete in puncto R impellatur non per directionem AP, ſed per oppoſitam AI, deſcribet reliquam ejuſdem curvæ portionem AO, & perveniendo ad O habebit directionem radio SO perpendicularem, cum ibi ſit radius ille SO ad ſubtangentem in ratione infinite parva ordinatæ ex vertice M in circulo MHK ( quæ ordinata evaneſcit ) ad conſtantem MN. Unde motum continuando eamdem curvam ad partes alteras repeteret, eritque punctum O vertex ſeu apogæum orbitæ hujus ſpiralis, cujus perigæum eſt ipſum centrum virium S, rectaque SO axis.

§. 262. Si ergo projectio fiat perpendicularis, hoc eſt angulus projectionis SAP rectus ſit; normalis SP cum radio SA, punctumque projectionis A cum punctis M, O convenient, eritque punctum projectionis A vertex, & SA axis curvæ: quem

caſum perſpicaciſſimus Newtonus innuit ſine demonſtratione Coroll. 3. Prop. 41. libri primi.

§. 263. Poſita projectione perpendiculari in dato puncto M, qui vertex erit ſpiralis, cum ratio conſtans MN ad MS eadem ubique ſit quæ ſectoris circularis ad ſectorem hyperbolicum, hinc determinari poſſunt puncta omnia quibus ſingulæ ſpiræ terminantur, ſeu in quibus axis SM ſpiralem ſecat: faciendo nimirum ut MN ad MS ita integer circulus MVKM ad ſectorem hyperbolicum; nam tangens hujus ſectoris ſecabit axem SM in primæ ſpiræ termino. Et dividendo aream aſymptoticam ſemidiametro SM, aſymptoto, & hyperbola comprehenſam, in ſectores primo illi æquales, tangentes in extremitatibus horum ſectorum ſecabunt axem SM in terminis omnium ſpirarum: Cumque area aſymptotica ſit infinita, atque adeo in infinitos numero ſectores æquales dividatur, etiam ſpirarum numerus erit infinitus.

Quo ſublimitas RM major erit eo erit etiam major ordinata MN, eoque major ratio MN ad MS, ſeu ſectorum circularium ad hyperbolicos, qui proinde erunt minores, eorumque tangentes ſecabunt axem SM in punctis vertici M proximioribus: radii ergo ſpiralium erunt majores & ſpiræ ampliores. Quod ſi ſublimitas RM ſit infinita, etiam MN, ejuſque ratio ad MS erit infinita, atque adeo ratio ſectorum circularium ad hyperbolicos, qui proinde erunt omnes infinite parvi, & cum ipſo axe SM convenient. In hoc ergo caſu radii omnes ſpiralis æquales erunt axi SM, & ſpiralis abibit in circulum MVK.

§. 264. Velocitatum proportiones tum in eadem tum in diverſis ſpiralibus, facile ex dictis colligi poſſunt: itemque velocitas in quolibet ſpiralis puncto B ad velocitatem qua deſcribitur circulus in eadem a centro diſtantia SB reperietur

tur eſſe ut DF ad SR; ſive (uti analytice etiam colligitur ex canone §. 169.) ut $\sqrt{cc - rr}$ ($\sqrt{SR^2 - SB^2}$) ad c (SR).

§. 265. Poſita conſtructione ejuſdem figuræ 74. uti in §. 260. ducatur etiam in quadrante MHK ordinata tc infinite proxima ad DH, & ex puncto H recta Ha parallela ad Dt: erit ca. aH :: SD. DH. itemque Ha ſeu Dt, ſive Bl. lg :: BS. SZ ſubtangentem ſpiralis, ſeu (§. 260.) :: DH. MN. Ergo ex æquo erit ca ad lg ut SD ſeu SB ad MN, ac proinde rectangulum SB×lg æquale rectangulo MN×ca, & dimidium rectanguli SB×lg, hoc eſt triangulum ſeu area infinite parva BSg æqualis rectangulo dimidiæ MN× ca. Summa ergo arearum BSg, hoc eſt area ſpiralis OSB æquatur ſummæ rectangulorum dimidiæ MN×ca, hoc eſt rectangulo dimidiæ MN in ordinatam quadratis DH. Ex quo colligi poteſt areas ſpirarum omnium ſimul ſumptas, hoc eſt (cum ſpirales infinitis ſpiris ſeu revolutionibus contineantur) ſi ſumatur integra area primæ ſpiræ a perimetro uſque ad centrum, itemque area ſecundæ ſpiræ a perimetro ad centrum, & ita aliarum ſpirarum decreſcentium in infinitum, has omnes, inquam, ſpirarum areas ſimul ſumptas æquales eſſe dimidio rectanguli MN×SK, ſeu MN×MS: maximamque omnium ſpiralium, quæ eodem puncto ſublimi R, ſeu eodem quadrante RNE deſcribuntur eam eſſe, cujus axis SM æquatur ordinatæ MN, ſeu cujus axis quadratum eſt dimidium quadrati SR; omnium enim rectangulorum abſciſſæ SM in ordinatam MN maximum eſt ubi abſciſſa & ordinata ſunt æquales.

§. 266. Cum ergo tempora motus curvilinei ſint (§. 153.) proportionalia areis, quas mobile radiis ad centrum ductis deſcribit; erunt proinde

inde tempora per ſpiralis arcus quoslibet Ob OB ( ſumpto initio a vertice ſpiralis O ) ut rectangula $MN \times dh$, $MN \times DH$, ſive [ ob MN conſtantem ] ut ordinatæ dh, DH, & quadrata temporum per arcus Ob, OB ut quadrata ordinatarum dh, DH, ſeu ut differentia quadratorum $SO^2 - Sb^2$ ad differentiam quadratorum $SO^2 - SB^2$.

§. 267. Cumque §. 78. demonſtratum ſit in hac lege virium centripetarum dum corpus libere deſcendit motu rectilineo ex quiete in dato puncto M uſque ad centrum S, ſcalam temporum ab initio motus eſſe eumdem quadrantem MHK, hoc eſt tempora per Md, MD, eſſe inter ſe ut ordinatæ dh, DH: inde fit ut tempora motus curvilinei per arcus quoslibet ſpiralis Ob, OB a vertice ſumptos ſint inter ſe ut tempora lapſus rectilinei ex eadem altitudine per ſpatia ub, VB.

§. 268. Conſtruatur ad axem SMR curva Smnq; cujus quælibet ordinata Dm ſit æqualis perpendiculo SQ ducto ex centro S ſuper BQ tangente ſpiralem in puncto B æque alto ac punctum D: Erit curva hæc ( §. 184. ) ſcala temporum elementarium motus rectilinei corporis libere cadentis ex quiete in puncto R per RS; & tempus quo motu curvilineo deſcribitur quilibet ſpiralis arcus OB, erit ad tempus quo motu rectilineo percurritur quælibet altitudinis RS pars RD ut area ſpiralis OSB ad dimidium areæ RqmD.

Porro producta tc occurrat circulo RCE in $\Delta$, & ex F ducatur $F\Omega$ parallela Dt: Eritque $\Delta\Omega$ ad $\Omega F$ ſeu ad Dt ut ordinata FD ad ſubtangentem circuli, ſeu ut SD ad DF hoc eſt ( §. 260. ) ut SQ ſive Dm ad MN: quare rectangulum $Dt \times Dm$, ſive area infinite parva Dmut æquatur rectangulo $MN \times \Delta\Omega$; & ſumma area-

rum

rum Dmut hoc eſt area RqmD æqualis ſummæ rectangulorum $MN \times \Delta\Omega$ hoc eſt rectangulo $MN \times DF$. Eſt ergo tempus motus rectilinei per quamlibet ſpatii partem RD proportionale rectangulo $MN \times DF$, ſeu (ob conſtantem MN) proportionale ordinatæ DF in quadrante RNE, quemadmodum, §. 78. repertum fuit.

§. 269. Cum ergo area ſpiralis OSB æquetur (§. 265.) dimidio rectangulo $MN \times DH$, & area RqmD æquetur (§. 268.) rectangulo $MN \times DF$: erit area ſpiralis OSB ad dimidium areæ RqmD, hoc eſt tempus motus curvilinei per OB ad tempus motus rectilinei per RD, ut rectangulum $MN \times DH$ ad rectangulum $MN \times DF$, ſeu ut DH ad DF. Et tempus revolutionis per integram ſpiralem OBS ad tempus lapſus rectilinei per RS ut SK ad SE, ſeu ut axis ſpiralis SO ad altitudinem SR.

§. 270. Atqui tempus lapſus rectilinei ex quiete in R per RS ad tempus lapſus rectilinei ex quiete in O per OS eſt (§. 79.) ut quadratum SR ad quadratum SO: Ergo tempus revolutionis per integram ſpiralem OBS ad tempus lapſus rectilinei per ſuum axem OS eſt in ratione compoſita SO ad SR & $SR^2$ ad $SO^2$, hoc eſt ut SR ad SO.

Ex quo etiam colligitur, tempora revolutionum in diverſis ſpiralibus a vertice ad centrum eſſe inter ſe in compoſita ratione axium & altitudinum puncti ſublimis. Atque adeo ſi idem ſit punctum ſublime tempora revolutionum erunt ut axes, & ſi idem ſit axis ſeu vertex ſpiralium tempora revolutionum erunt ut altitudines puncti ſublimis.

## CASUS II.

*Deſcribuntur curvæ, quæ datis puncto & directioni projectionis percurruntur a mobili projecto ea velocitate quam acquireret lapſu rectilineo ex infinita diſtantia; ſeu (quod idem eſt) quam acquireret lapſu ex quiete in eodem puncto projectionis uſque ad diſtantiam a centro, cujus quadratum ſit dimidium quadrati datæ diſtantiæ projectionis.*

Fig. 75. §. 271. SIT S centrum virium, A punctum projectionis, AP directio, velocitas vero ſit ea quæ in eadem virium lege acquiritur lapſu rectilineo ex puncto R infinite alto uſque ad punctum A; ſeu (quod idem eſt §. 81. & 82.) quæ acquiritur lapſu rectilineo ex quiete in eodem puncto projectionis A uſque ad punctum G, quod diſtet a centro intervallo SG cujus quadratum ſit dimidium quadrati SA. Erunt in hoc motu rectilineo corporis cadentis ex infinita diſtantia (§. 83.) velocitates in punctis quibuslibet A, D reciproce ut diſtantiæ a centro SD, SA. Si ergo in hoc motu rectilineo ſumatur quodlibet punctum D ſive ſupra ſive infra projectionem A, centroque S deſcribatur per D arcus circuli DB, qui ſecet curvam a projecto deſcriptam in B, ubi tangat recta BQ, cui ſit ex centro perpendicularis SQ, & SP ſuper data directione AP: Erit (§. 180.) velocitas in A ad velocitatem in D, hoc eſt SD. SA :: SQ. SP, ſive SB. SQ :: SA. SP; Cum itaque triangula rectangula ASP, BSQ habeant duo latera proportionalia erunt æquiangula, & anguli contactus SAP, SBQ erunt æquales. Ex quo patet curvam AB quæ a projecto deſcribitur eſſe ſpiralem logarithmicam.

§. 272.

§. 272. Hinc ſi angulus projectionis SAP ſit rectus, curva quæ a Projecto deſcribitur erit circulus cujus centrum S: quod etiam ex caſu præcedenti demonſtravimus §. 263.

§. 273. Velocitates in variis ſpiralium punctis ( ſive eadem ſit ſpiralis ſive diverſa ) ſunt in reciproca ratione altitudinum, ſeu diſtantiarum a centro: ſunt enim æquales velocitatibus quas in punctis illis acquirit mobile decidens ex infinita diſtantia. Ex quo colligitur velocitates corporum quæ in diverſis circulis circa idem centrum virium volvuntur eſſe in hac virium lege in reciproca ratione ſemidiametrorum. Item velocitas in quolibet ſpiralis logarithmicæ puncto B æqualis erit velocitati qua deſcribitur circulus in eadem a centro diſtantia SB; quod colligitur etiam ex canone §. 169.

§. 274. Ducatur ſubtangens SZ perpendicularis radio ſpiralis SB, & ad axem SA applicetur in puncto D æque alto ac punctum B ordinata DC æqualis ſubtangenti SZ: tum ducta ex puncto S per punctum C recta SCE, erit quælibet alia ordinata AE æqualis ſubtangenti in puncto A: Eſt enim SB ad SA ut ſubtangens SZ ad ſubtangentem puncti A; atqui SB ſeu SD. SA :: DC. AE, & SZ=DC; ergo AE æquatur ſubtangenti in puncto A. Quibus poſitis ſit radius Sb infinite proximus SB, ducaturque centro S arcus circuli bnd, & dc parallela DC: eritque Bn. nb :: BS. SZ: quare rectangulum $SZ \times Bn$, ſeu $DC \times Dd$, ſive area infinite parva, DCcd, eſt æqualis rectangulo $SB \times bn$, hoc eſt dupla trianguli ſeu areæ BSb, idemque dicendum de aliis areis infinite parvis uſque ad centrum S tum in ſpirali tum in triangulo DSC: Erit ergo ſumma arearum CDdc, hoc eſt triangulum DSC duplum ſummæ arearum BSb, hoc eſt areæ ſpiralis BXS quam radius SB circa cen-

trum

trum S revolutus per ſpiras omnes deſcribit. Item triangulum ASE erit duplum areæ ſpiralis ABXS. Tempora ergo revolutionum per ABXS, BXS (quæ areis illis ſpiralibus proportionalia ſunt) erunt inter ſe ut triangula ASE, DSC, ſeu ut quadrata AS, BS. In eadem etiam ratione quadratorum AS, BS repertum est §. 83. eſſe tempora deſcenſus rectilinei per AS, BS corporis lapſi ex infinita diſtantia, ſive (§. 79.) etiam lapſi ex quiete in punctis ipſis A & B.

§. 175. Secetur radius quicumque SA in punctis A, H, K, O &c. ab eadem ſpirali AXH, cujus ſumantur duo quælibet ſpiræ AXH, KYO erit ex hujus curvæ natura SA. SH : : SK. SO, & quadrando terminos ac dividendo erit $SA^2$. $SK^2$ : : $SA^2 - SH^2$. $SK^2 - SO^2$, ſive (ductis ordinatis HF, KL, OV in triangulo ſubtangentium ASE) : : ASE——HSF. KSL——OSV, hoc eſt : : AHFE. KOVL: atqui area AHFE eſt dupla (§. 274.) areæ quæ ſpira AXH, & radiis SA, SH comprehenditur; ſimiliterque area KOVL eſt dupla areæ quæ comprehenditur ſpira KYO & radiis SK, SO: Ergo hujuſmodi areæ ſpirales, hoc eſt tempora quibus ſpiræ AXH, KYO deſcribuntur ſunt inter ſe ut quadrata SA, SK, ſive ut quadrata SH, SO.

Fig. 76. §. 276. Ex quo colligitur, tempora quibus circuli concentrici AX, KY deſcribuntur, eſſe in hac virium lege ut quadrata ſemidiametrorum SA, SK. Siquidem in ſpirali AXS (fig. 75.) quo angulus contactus SAP recto magis accedit, eo intervalla inter ſpiras AH, HK, KO &c. minora ſunt: ubi ergo angulus contactus SAP rectus ſit, intervalla illa erunt infinite parva, & ſpirarum ſeries, quæ differentia infinite parva decreſcunt, aream omnem inter primam ſpiram & centrum S complebunt. Circuli ergo concentrici (fig. 76.) AX, KY ſumendi ſunt

velu-

veluti ſpiræ ejuſdem ſpiralis logarithmicæ re-ctangulæ: quare ( ſ. 275. ) tempora quibus ſpiræ ſeu peripheriæ AXH, KYO deſcribuntur ſunt ut quadrata radiorum SA, SK.

Hoc idem demonſtratur ex ſ. 273. ubi diximus velocitates in circulis AX, KY eſſe radiis SA, SK reciproce proportionales. In circulis enim motus eſt æquabilis, adeoque tempora ſunt directe ut ſpatia percurſa, & reciproce ut velocitates: ſpatia in caſu noſtro ſunt peripheriæ ipſæ, quæ inter ſe ſunt ut radii: Ergo &c. Fig. 75.

§. 277. Sint item ad axem SA ordinatæ quælibet AN, DM æquales perpendiculis SP, SQ ductis ex centro ſuper tangentibus ſpiralis in punctis æquealtis: erit etiam recta per centrum tranſiens SMN linea quæ has omnes ordinatas terminat: nam ex natura hujus ſpiralis SA. SP : : SB. SQ; hoc eſt ex conſtructione SA. AN : : SD. DM. Eſt ergo [ §. 184. ] tempus motus curvilinei per ſpiralem BXS a puncto B uſque ad centrum S, ad tempus motus rectilinei per BS corporis lapſi ex infinita diſtantia, ut area ſpiralis quam radius a puncto B uſque ad centrum per ſpiras omnes deſcribit, hoc eſt [ ſ. 274 ] dimidium trianguli DSC, ad dimidium trianguli DSM, ſive ut DC ad DM, hoc eſt ut ſubtangens SZ ad perpendiculum SQ, ſeu ut tangens BZ ad radium BS. Cumque tangens BZ æquetur perimetro ſpiralis BXS a puncto B uſque ad centrum S, proinde tempora motus curvilinei per ſpiralem BXS, & motus rectilinei per radium BS poſt lapſum ex infinita diſtantia erunt etiam in ratione ſpatiorum percurſorum, hoc eſt perimetri ſpiralis BXS ad radium BS.

ſ. 278. Item cum demonſtratum ſit ſ. 85. tempus quo corpus labitur ex quiete in B uſque ad centrum S duplum eſſe temporis, quo idem ſpatium BS percurritur a corpore lapſo ex infinita di-

diſtantia: inde ſequitur, tempus motus curvilinei per ſpiralem BXS eſſe ad tempus lapſus rectilinei ex quiete in B uſque ad centrum S, ut tangens BZ, ſeu ut ſpiralis ipſa BXS ad duplum radii BS.

§. 279. Tempus quo percurritur quælibet integra ſpira AXH ad tempus quo motu rectilineo percurritur AS a corpore lapſo ex infinita diſtantia eſt (§. 184.) ut area ſpiralis comprehenſa ſpira illa AXH & radiis SA, SH ad dimidium trianguli ASN. In ſpirali ergo rectangula, hoc eſt ubi anguli contactus SAP [Fig. 76.] recti ſunt, quoniam ſingulæ ſpiræ ſunt (§. 276.) peripheriæ circulares, & AN æquatur radio AS, adeoque dimidium trianguli ASN æquatur quadrato dimidii radii AS; inde fit ut tempus quo deſcribitur circumferentia circuli AX ſit ad tempus quo percurritur radius AS a corpore lapſo ex infinita diſtantia, ut area circuli ad quadratum dimidii radii, ſive ut circumferentia ad dimidium radii: ad tempus vero quo radius AS percurritur a corpore labente ex quiete in puncto ipſo circumferentiæ A, erit [§. 85.] ut circumferentia ad radium, hoc eſt ut ſpatia ipſa percurſa.

## CASUS III.

*Deſcribuntur Curvæ, quæ datis puncto & directione projectionis percurruntur a mobili projecto ea velocitate quam acquireret lapſu ex quiete in eodem puncto projectionis uſque ad diſtantiam a centro, cujus quadratum minus ſit quam dimidium quadrati datæ diſtantiæ projectionis.*

§. 280. PRojiciatur mobile in dato puncto A ſecundum datam directionem AP cum ea velocitate quam acquireret in eadem virium centripetarum lege lapſu rectilineo ex quiete in eodem puncto projectionis A uſque ad datum punctum G quod diſtet a centro virium S intervallo SG cujus quadratum minus ſit dimidio quadrati SA. Fig. 77.

Facto $SA^2 - 2SG^2 . SG^2 :: SA^2 . SR^2$, & poſita recta SR perpendiculari ad SA in puncto S; conſtat ex demonſtratis §. 86, velocitates in punctis quibuslibet A, D corporis motu rectilineo cum data velocitate in puncto A aut ad centrum S cadentis per AS, aut ſurſum impulſi, eſſe inter ſe ut $\frac{AR}{AS}$ ad $\frac{DR}{DS}$. Si igitur in hoc motu rectilineo ſumatur quodlibet punctum D ſive ſupra ſive infra projectionem A, centroque S deſcribatur per D arcus circularis DB, qui ſecet curvam quæ a projecto deſcribitur in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, cui ſit ex centro perpendicularis SQ, quemadmodum SP ſuper data directione AP; erit (§. 180) velocitas in A ad velocitatem in D, hoc eſt $\frac{AR}{AS} . \frac{DR}{DS} :: SQ . SP$, ſive (ſumendo qua-

N dra-

drata omnium terminorum $\frac{SR^2 \times SA^2}{SA^2}$ . $\frac{SR^2 \times SD^2}{SD^2}$ : : $SQ^2$ . $SP^2$ .

§. 281. Si ergo ponanatur datæ SA = a , SP = b, SR = c, & indeterminatæ SB = SD = r, SQ = p, erit $\frac{cc+aa}{aa}$ . $\frac{cc+rr}{rr}$ : : pp. bb. , & $\frac{ccpp+rrpp}{rr}$ = $\frac{ccbb+aabb}{aa}$. Quod ſi fiat SA (a). SP [b] : : AR [ $\sqrt{cc+aa}$ ]. ad quartam, quæ brevitatis gratia ponatur = n , erit nn = $\frac{ccbb+aabb}{aa}$, adeoque $\frac{ccpp+rrpp}{rr}$ = nn, & pp = $\frac{nnrr}{cc+rr}$. Sit porro radius Sb infinite proximus radio SB, eorumque differentia bm = dr ; & Bm = dy: eritque $Bb^2$ ($dr^2 + dy^2$). $Bm^2$ ( $dy^2$ ) : : $SB^2$ (rr). $SQ^2$ (pp) = $\frac{rrdy^2}{dr^2+dy^2}$ : quare $\frac{nnrr}{cc+rr}$ = $\frac{rrdy^2}{dr^2+dy^2}$ ; ex quo colligitur dy = $\frac{ndr}{\sqrt{rr-nn+cc}}$ in quo valore elementi dy advertendum eſt, quantitatem n eſſe poſſe vel majorem , vel æqualem, vel minorem quantitate c ; & pro triplici hac hypotheſi tres eſſe curvas, quæ a projecto deſcribuntur natura diverſæ.

§. 282. Erit quantitas n æqualis quantitati c (SR), quoties angulus projectionis SAP æquatur angulo SAR : in hac enim hypotheſi triangula rectangula SAP , SAR erunt ſimilia , & SA . SP : : AR . RS: cumque factum ſit SA . SP

SP : : AR : n; erit n = RS (c). Quod ſi angulus projectionis SAP major ſit angulo SAR; ratio SA : SP (ſeu ratio AR : n) erit minor ratione AR : RS; ac proinde quantitas n major RS (ſeu c). Si demum angulus projectionis SAP minor ſit angulo SAR, erit n minor SR (c).

Cum itaque recta SR diverſa eſſe poſſit pro diverſo gradu velocitatis (§. 280.) qua in hoc tertio caſu mobile projectum ſupponitur in dato puncto A: ponatur data eſſe hujuſmodi velocitas, hoc eſt data recta SR, datuſque proinde angulus SAR; eruntque deſcribendæ curvæ, quæ a projecto percurruntur ſive angulus projectionis SAP ſit major, ſive æqualis, ſive minor dato angulo SAR. Id vero claritatis gratia in tres articulos diſtinguemus.

## ARTICULUS I.

§. 283. SIT primo angulus projectionis SAP major dato angulo SAR. Cumque factum ſit (§. 281.) SA (a) : SP (b) : : AR ($\sqrt{cc + aa}$) : n: erit (§. 282.) n major quam SR (c); at vero non erit minor quam RA, quandoquidem SP non poteſt eſſe minor quam SA: Poterit ergo ex aliquo puncto M rectæ SA duci ad punctum R recta MR = n, eritque $MR^2 - RS^2$, hoc eſt $nn - cc = MS^2$, & poſito brevitatis cauſſa MS = m, erit

$$\frac{ndr}{\sqrt{rr - nn + cc}}, \text{ hoc eſt (paragrapho 281.) } dy = \frac{ndr}{\sqrt{rr - mm}}.$$

Porro centro S, intervallo SM deſcribatur ci-
culus MOL, qui ſecet radios SB, Sb, in pu-
ctis V, u; ponaturque elementum periphe-
Vu = dz: erit SB (r). Bm (dy) : : SV (m)

$$Vu\ (dz) = \frac{mdy}{r} = \frac{mndr}{r\sqrt{rr-mm}}, \text{ ſive } = \frac{n}{m} \times \frac{mmdr}{r\sqrt{rr-mm}}.$$

Hoc differentiale $\frac{mmdr}{r\sqrt{rr-mm}}$ reduci poteſt ad differentiale arcus circularis ſupponendo r = $\frac{mm}{\sqrt{mm-xx}}$; reperietur enim $\frac{mmdr}{r\sqrt{rr-mm}} = \frac{mdx}{\sqrt{mm-xx}}$, quod eſt differentiale ejuſdem peripheriæ MOL deſcriptæ radio SM (m). Si quidem ſi ex quolibet puncto Y ducatur ad diametrum SM ordinata YX, quæ ponatur = x & ex eodem puncto Y ducatur tangens YD quæ occurrat diametro SM in D; erit SD = $\frac{SY^2}{SX} = \frac{mm}{\sqrt{mm-xx}} = r$, & differentia infinite parva arcus MY erit $= \frac{mdx}{\sqrt{mm-xx}}$.

Quoniam igitur Vu, ſeu dz æquatur (ut ſupra dictum eſt) $\frac{n}{m} \times \frac{mmdr}{r\sqrt{rr-mm}}$; erit etiam

de

$dz = \frac{n}{m} x \frac{mdx}{\sqrt{mm - xx}}$ : atque adeo horum differentialium ſummæ æquales erunt, ſcilicet $S.dz = \frac{n}{m} x S. \frac{mdx}{\sqrt{mm - xx}}$, hoc eſt $z = \frac{n}{m} x MY$.
Eſt autem z arcus circularis OV, ſumpto initio a puncto quodam fixo O, quod determinandum erit. Ergo $OV = \frac{n}{m} x MY$; & m[MS].n(MR) : : MY . OV : quo facto, ſi in recta SV producta ſumatur SB = SD (r), erit B punctum curvæ quæſitæ quæ a projecto deſcribitur.

Determinatur vero punctum O ex eo quod curva quæſita tranſire debet per datum punctum projectionis A: quare ſi ex eo puncto ducatur tangens circuli AL, fiatque ut MS (m) ad MR (n) ita arcus ML ad arcum MO, erit punctum O initium a quo ſumi debent arcus circulares indeterminati OV, OM &c.

Synthetica ergo conſtructio & demonſtratio hujus problematis ita ſe habet.

§. 284. Ponatur primum projectio AP perpendicularis, hoc eſt angulus projectionis SAP ſit rectus: in quo caſu conſtructio problematis erit hujuſmodi. Fig 78.

Centro S intervallo SA deſcribatur circulus AVC, tum producta SA in infinitum, ex quolibet ejus puncto D ducatur DE tangens circulum in E, fiatque ut SA ad AR ita arcus AE ad arcum AV; & ducta per centrum SVB ſumatur in ea SB = SD, erit punctum B in curva quæſita quæ a projecto percurritur.

§. 285. Siquidem poſitis iis quæ §. 280. dicta ſunt; curvæ AB proprietas ea eſſe debet, ut

ductis perpendiculis SQ, SA ſuper tangentib[us] in punctis B, A; ſit SQ . SA : : $\frac{AR}{AS}$ . $\frac{DR}{DS}$

Ea vero proprietas pertinet ad curvam ſup[ra] deſcriptam; quod ita demonſtratur.

Sumpta Dd infinite parva, ducatur ex d ta[n]gens de, factoque, uti ſupra, SA . AR :: Ae Au, ducatur Sub infinite proxima ad SVB, centro S intervallo Sd deſcribatur arcus circu[li] dbm; eritque Bb elementum curvæ, quod pr[o]ductum dabit tangentem BZ, cujus ducatur ſub tangens SZ ad SB perpendicularis: Item produ[cantur] cantur SE, Se donec occurrant in T & t re[ctæ] ctæ AT tangenti circulum in puncto A: erit que ST=SD=SB, & St=Sd=Sb, atque ade[o] ſi centro S deſcribatur arcus tn, erit Tn=Bm Quibus poſitis radius SB erit ad ſubtangente[m] SZ ut Bm ad mb, hoc eſt in ratione compoſ[i]ta ex duabus rationibus, ſcilicet Bm, ſeu Tn ad nt, & nt ad mb; quarum rationum prim[a] Tn ad nt (ob ſimilia triangula Tnt, TAS) ea dem eſt quæ TA ad AS; & ſecunda ratio n[t] ad bm (ob St = Sb, & Se = Su) eadem e[ſt] quæ Ee ad Vu, ſive (quoniam ex conſtructio ne tam arcus EA, AV, quam arcus eA, A[u] ſunt inter ſe ut SA ad AR, adeoque in eade[m] ratione erunt etiam eorumdem arcuum differen tiæ Ee, Vu) eadem quæ SA ad AR: quæ du[æ] rationes TA . AS, & AS . AR componunt r[a]tionem AT . AR: eſt ergo radius SB ad ſu[b]tangentem SZ : : AT . AR: & quadrando te[r]minos ac componendo erit $\overline{SB^2 + SZ^2}$ ($BZ^2$) . $SZ^2$ : : $\overline{AT^2 + AR^2}$ . $AR^2$. eſt autem $AT^2 + AR^2 = AT^2 + AS^2 + SR^2 = ST^2 + SR^2 = SD^2 + SR^2 = DR^2$ ergo $BZ^2$ . $SZ^2$ : : $DR^2$ . $AR^2$. , & BZ . SZ ſive SB . SQ : : DR . AR

Cum.

Cumque ratio SQ ad SA compoſita ſit ex duabus rationibus SQ ad SB, & SB ad SA, quarum prima SQ ad SB eadem eſt quæ AR ad DR, uti mox demonſtratum eſt; ſecunda vero SB ad SA eadem quæ SD ad SA: erit proinde SQ . SA : : AR x SD . DR x SA ſive : : $\frac{AR}{AS} . \frac{DR}{DS}$

Quod ſumpſimus demonſtrandum.

§. 286. Poteſt hic adnotari, curvæ hujus conſtructionem non differre a conſtructione curvæ caſus primi §. 259. niſi in eo quod illa ope hyperbolæ æquilateræ, hæc vero ope circuli deſcribitur: nam quod ibi uſurpavimus ſectores hyperbolicos, hic etiam uſurpare poteramus ſectores circulares; verum ratio ſectorum circularium ASE, ASV eadem eſt ac ratio arcuum AE, AV. Solutio etiam problematis ac demonſtratio ſimilis omnino eſt caſus primi.

§. 287. Cum radius quilibet SB ad ſubtangentem SZ ſit (§. 285.) ut AT ad AR; inde ſit ut in puncto curvæ A ubi AT eſt nulla, adeoque ratio AT ad AR eſt infinite parva, ſit etiam infinite parva ratio radii SA ad ſuam ſubtangentem; adeoque tangens curvæ in puncto A erit ipſi radio SA perpendicularis, & punctum A vertex curvæ, ſeu perigæum hujus motus curvilinei.

§. 288. At cum ubique per conſtructionem curvæ fieri debeat ut SA ad AR ita arcus quilibet AE ad AV, & ſecanti SET æqualis radius SVB ſumi debeat, ut habeatur punctum curvæ B: cumque radius quibibet SB ad ſubtangentem SZ ſit ut tangens circuli AT ad rectam conſtantem AR: inde ſequitur ut ſi pro arcu AE ſumatur quadrans peripheriæ AC, fiatque ut SA ad AR ita quadrans AC ad arcum AVL, cum in hoc caſu ſecans quadrantis SCK ſit infini-

finita atque parallela & æqualis tangenti ATK; erit radius curvæ SLF infinitus & æqualis tangenti ATK, atque adeo ſubtangens quæ radio infinito SLF correſpondet erit æqualis rectæ conſtanti AR. Si ergo radio SLF ducatur in puncto S perpendicularis SY = AR, & ex puncto Y recta YW parallela radio SF, erit SY ſubtangens radii infiniti SF, & YW curvæ aſymptoton.

§. 289. Curva hæc eadem eſt ac ea quam per ellipſem deſcribit cl. Newtonus lib. 1. Prop. 41. coroll. 3. verum ait deſcribi etiam a corpore vi centrifuga impulſo, quod caſui noſtro convenire non poteſt (§. 152.) cum hæc curva concava ſit verſus centrum virium. Si tamen ratio conſtans SA ad AR ſit ratio majoris inæqualitatis (quod advertere debuiſſet Newtonus) alia orietur curva, quæ erit verſus centrum convexa & vi centrifuga deſcribetur. Vide infra Sectione II. §. 326.

§. 290. Eadem etiam eſt curva hæc ac ea quam deſcribit cl. Io: Bernoullius in actis lipſ. an: 1713 menſis martii §. 68., ubi ſic ait applicando ejus verba ad noſtram figuram „ Per centrum virium „ quod ſit in S ductæ rectæ pro axe inſervien„ ti SF agatur intervallo arbitrario parallela „ XM; dein centro S deſcriptis arcubus con„ centricis FI, HB, gb &c., qui ſinguli ad par„ tem ſuam a parallela XM terminatam ha„ beant datam aliquam rationem conſtantem; „ nimirum ut ſit a . b : : FM . FI : : HN : „ HB : : gO : gb &c. orietur curva IBbA . . . &c. Curva hæc, inquam, eadem eſt ac noſtra: Siquidem ducto extremo curvæ noſtræ radio SLF, quem §. 288. diximus eſſe infinitum, eique ad angulos rectos in centro S recta SY = AR, quæ ſecet circulum in X, & ex puncto X recta XM parallela radio SF, ſive aſymptoto

YW,

YW, ſumatur quodlibet curvæ noſtræ punctum B, & centro S, intervallo SB deſcribatur arcus BH, qui occurrat radio infinito SF in H, & parallelæ XM in N. ducatur etiam ſecans circuli ST æqualis radio SB ſeu SN. Eruntque triangula SAT, SXN ſimilia, namque præter angulos rectos habent etiam latera SA, ST æqualia lateribus SX, SN; angulus ergo AST eſt æqualis angulo XSN; qui æquales anguli ſi demantur ex angulis rectis ASC, XSL, remanebunt æquales anguli CSE, LSf, ſive æquales arcus CE, Lf. Quibus poſitis cum ex noſtra conſtuctione (§. 288.) tam arcus quilibet AE ad AV, quam quadrans peripheriæ AC ad arcum AVL ſint in ratione conſtanti SA ad AR, ſeu SX ad SY; in eadem ratione conſtanti erunt etiam illorum arcuum differentiæ; ſcilicet arcus CE (ſive Lf, uti mox demonſtratum eſt) ad arcum LV, ſeu arcus HN ad arcum HB in ratione conſtanti SX ad SY; ut in conſtructione bernoulliana.

§. 291. Quantitatis ergo a & b quibus Bernoullius exprimit rationem conſtantem arcuum FM. FI : : HN. HB : : gO. gb &c. ſunt rectæ SX, SY, ſive SA, AR, quæ determinantur ex data velocitate projectionis juxta conſtructionem a nobis §. 286. explicatam: nimirum ſi velocitas projectionis in dato puncto A ea ponatur, quam mobile acquireret lapſu rectilineo ex quiete in eodem puncto projectionis A uſque ad punctum G, dummodo quadratum SA majus ſit duplo quadrati SG, fieri debet

$SA^2 - 2SG^2 . SG^2 : : SA^2 . . SR^2$. Ex quo fit ut quo major eſt velocitas projectionis, ſeu quo major lapſus rectilineus AG, eo magis punctum R accedit ad centrum S, eoque magis ratio minoris inæqualitatis SA ad AR ad æqualita-

litatem accedit; & ſi $AG = AS$, hoc eſt ſi mobile projiciatur in puncto A ea velocitate quam acquireret lapſu rectilineo ex quiete in A uſque ad centrum S (quæ eſt velocitas infinita §. 81.) punctum R conveniet cum centro S, & AR cum AS, in quo caſu conſtructio problematis §. 284. dabit pro curva quæ a projecto deſcribitur, rectam ipſam AP quæ eſt directio projectionis, etiamſi angulus projectionis non ſit rectus ut in fig. 77. Viceverſa quo minor eſt velocitas projectionis (dummodo non eo decreſcat, ut duplum quadrati SG ſuperet quadratum SA) eo magis punctum R a centro S recedet, minorque evadit ratio AS ad AR: Et ſi $2SB^2 = SA^2$, hoc eſt ſi mobile projiciatur in puncto A ea velocitate quam acquireret in eodem puncto A lapſu rectilineo ex infinita diſtantia, ut in caſu II. §. 271, punctum R infinite diſtabit a centro S, & ratio AR. AS erit infinita, in quo caſu ſi angulus projectionis ſit rectus conſtructio problematis §. 284. dabit circulum ipſum AVC; quilibet enim arcus AV habebit rationem infinitam ad arcum AE qui erit infinite parvus, ac proinde omnes curvæ radii SB æquales erunt radio circuli SA.

§. 292. Hinc patet curvam AB eo minus circa centrum virium S circumflecti, quo majori velocitate corpus projicitur: ſiquidem cum ex conſtructione (§. 288.) faciendum ſit ut SA ad AR ita quadrans circumferentiæ AC ad arcum AVL ad habendum ultimum curva radium infinitum SLF, ultra quem curva non progreditur, quo minor fuerit AR, ſeu quo major velocitas projectionis, eo minor evadit arcus AVL.

Sit exempli cauſſa $SG^2 = \frac{3}{7} SA^2$, erit AR

AR = 2AS, ſive SY = 2SX, & curva ABI flectetur uti in fig: 79, ubi AS, LF unam rectam conſtituent quæ eſt axis curvæ, YW, yw axi parallelæ ad diſtantiam SY ſive Sy duplam SA ſunt curvæ aſymptota, & curva duo habebit ſimilia & æqualia crura ABI, Abi, quorum alterum ABI deſcribit mobile projectum directione AP, alterum vero Abi projectum contraria directione Ap.

Sit item AR = 3AS, ſive SY = 3SX (quod accidit quando $SG^2 = \frac{8}{17} SA^2$) curva ABI procedet ut in fig: 80, habebit nimirum a vertice A duo æqualia crura ABI, Abi, aſymptota vero YW, yw, quæ unam rectam conſtituent utrimque infinitam pro utroque crure axi ASY perpendicularem, ejuſque a centro diſtantia SY eſt tripla ſemidiametri SA.

Sit AR = 4AS (adeoque $SG^2 = \frac{15}{31} SA^2$): Curva ABI erit ut in fig: 81, ubi utrumque crus ABI vel, ABi, integrum gyrum circa centrum virium S conficit.

Sit $SY = \frac{10}{3} SX$: curva ABI erit ut in fig: 82, in qua alterutrum crurum curvæ ABI, vel Abi non integram peripheriam circuli genitoris, ſed tantum decem ejusdem partes duodecimas ambit. Et ita de aliis.

§. 293. Notandum igitur eſt, Curvas haſce duobus ſimilibus & æqualibus cruribus contineri, eadem enim conſtructione (§. 284), & ab eodem projecto hinc inde a vertice A deſcribuntur, ABI, Abi; quæ duo crura a duobus aſymptotis æqualiter a centro virium S remo-

tis

tis clauduntur YW, yw. Centrum S eſt veluti umbilicus, & recta AS centrum cum vertice A conjungens producta ex ea parte ubi curva extenditur, eſt axis, quippe ſpatium curvilineum, ordinataſque, quas perpendiculares habere poteſt, æqualiter dividit, perque curvæ nodos (ſi qui ſunt), ac per punctum ubi aſymptota conveniunt tranſit; quare minus proprie a cl: Bernoullio pro axe aſſumitur poſtremus curvæ radius infinitus SF. Eſt vero hæc curva algebraica quoties ratio conſtans SX ad SY (quæ in conſtructione curvæ eſt ratio arcuum circularium) eſt numeri ad numerum; ſecus vero ſi SX & SY ſint incommenſurabiles erit tranſcendens curva.

§. 294. Quoniam aſymptoton YW eſt ſemper parallelum (§. 288.) radio infinito SF qui eſt poſtremus radiorum in curvæ brachio ABI, quemadmodum aliud aſymptoton yw parallelum eſt etiam ſuo extremo radio Sf: inde fit ut angulus WCw ab aſymptotis comprehenſus æquetur angulo comprehenſo a radiis illis FSf: atqui ex conſtructione curvæ (§. 288.) ad habendos radios SF, Sf, fieri debet ut SX ad SY ita quarta pars peripheriæ circuleris ad arcum AXL, & ita eadem quarta pars ad arcum Axl: quare ut 2SY ad SX ita ſumma duorum arcuum AXL, Axl ad quartam peripheriæ partem: Ex quo explicandum eſt quod cl: Bernoullius ait loco citato, angulum ab aſymptotis comprehenſum eſſe ad angulum rectum ut 2SY ad SX; pro menſura enim anguli aſymptotici WCw, ſive anguli FSf comprehenſi a radiis extremis ſumit ſummam duorum arcuum AXL, Axl. verum menſura anguli FSf eſt differentia inter ſummam duorum arcuum AXL, Axl, & integram peripheriam toties ſumptam quoties neceſſe eſt ut dicta differentia non ſit

Fig. 84.

ma-

major ſemiperipheria : Itaque cum ſumma arcuum AXL, Axl ſit ad integram peripheriam ut 2SY ad 4SX ; ideo toties ſumendum eſt 4SX quoties neceſſe eſt ut ejus differentia a 2SY non ſit major quam 2SX ; hæcque differentia erit ad SX ut angulus aſymptoticus ad angulum rectum.

§. 295. Hinc in fig: 79. ubi SY = 2SX, & in fig: 81. ubi SY = 4SX, & generaliter ubi SY ad SX ſe habet ut numerus par ad unitatem, adeoque 2SY ad SX ut numerus par duplicatus ( qui proinde per numerum 4. dividi poterit ) ad unitatem, angulus aſymptoticus erit nullus, & poſtremi radii SLF, Slf inter ſe congruent, unamque rectam cum axe conſtituent, ideoque aſymptota erunt parallela. At in fig: 80. ubi SY = 3SX, & generaliter quotieſcumque SY ſit ad SX ut numerus impar ad unitatem, ideoque 2SY ad SX ut numerus impar duplicatus ( qui proinde per 4. diviſus relinquat 2. ) ad unitatem, radii SLF, Slf duos angulos rectos comprehendent, unamque rectam conſtituent axi perpendicularem, ſimiliterque aſymptota in directum poſita erunt, eumdemque aſymptoton axi perpendicularem hinc inde infinitum pro utroque crure conſtituent.

§. 296. Quoniam ( §. 294. ) 2SY eſt ad 4SX ( ſive SY ad 2SX ) ut duo arcus ſimul AXL, Axl ad integram peripheriam, qui duo arcus AXL, Axl totum curvæ ambitum comprehendunt, quandoquidem radii infiniti SLF, Slf ſunt poſtremi omnium radiorum qui duci poſſunt ex centro S ad curvam IAi : inde fit ut quoties SY continet 2SX, toties curvæ ambitus contineat integram peripheriam. Curva ergo IAi priuſquam deſinat in aſymptota tot gyros integros circa centrum S conficiet quot

ſunt

ſunt unitates in $\frac{SY}{2SX}$, uti aſſerit cl: Bernoullius loco citato.

§. 297. Hactenus in ſynthetica demonſtratione projectionem corporis fecimus perpendicularem. At ſi in puncto A projiciatur ſecundum directionem AP, ſeu Ap directioni centrali AS inclinatam, ita tamen ut (juxta hypotheſim hujus primi artic. §. 283.) angulus projectionis SAP ſit major dato angulo SAR, adeoque facto SA ad perpendiculum SP ut AR ad quartam proportionalem RM, hæc applicari poſſit ex puncto R ad punctum aliquod M rectæ AS. Tum centro S intervallo SM deſcribatur circulus, quem tangat in L recta AL ducta ex puncto projectionis A, fiatque ut SM ad MR ita arcus ML ad arcum MO, erit punctum O vertex curvæ OA quæ a Projecto percurritur, quæque eadem eſt quæ ſupra, eademque conſtructione (§. 284.) deſcribitur, cujus circulus genitor eſt OM, ratio conſtans SM ad MR. Tranſit vero hæc curva per datum punctum projectionis A (quandoquidem factum eſt ut SM ad MR ita arcus ML ad arcum OM, & recta ML tangit circulum in L): item tanget datam directionem AP, quandoquidem factum eſt ut radius SA ad perpendiculum SP ita AR ad MR, quæ eſt (§. 285.) regula tangentium hujus curvæ.

Fig. 77.

§. 298. Quo minor eſt angulus projectionis SAP, ſeu quo minor perpendicularis SP, eo minor erit quarta illa proportionalis RM, minorque ſemidiameter SM circuli genitoris; minor etiam ratio conſtans SM ad MR, ſeu arcus ML ad arcum MO, ac proinde plures gyros circa centrum S conficiet curva a puncto projectionis A uſque ad verticem O. Quod ſi angulus

gulus projectionis SAP æquatur dato angulo SAR, punctum M congruet cum centro S, nullusque erit circulus genitor, quo curva deſcribi poſſit: diverſa igitur erit in hac hypotheſi curva quæ a Projecto deſcribitur, quam modo articulo ſecundo inveſtigabimur.

§. 299. Poſita conſtructione §. 285, ob ſimilitudinem triangulorum Tnt, TAS, erit Tt. Tn :: TS. TA. Item Tn, ſeu Bm. mb :: BS. SZ, ſeu (§. 285.) :: AT. AR. Ergo ex æquo erit Tt. mb :: ST (ſeu SB). AR, ac proinde rectangulum $SB \times mb$ æquale rectangulo $AR \times Tt$; & dimidium rectanguli $SB \times mb$, hoc eſt triangulum ſeu area infinite parva BSb æqualis rectangulo dimidiæ AR in Tt: ſumma ergo arearum BSb, hoc eſt area ASB axe SA radio SB, & curva AB comprehenſa, æquatur ſummæ rectangulorum dimidiæ AR in Tt, hoc eſt rectangulo dimidiæ AR in tangentem circuli AT. Fig. 78.

§. 300. Cum ergo tempora motus curvilinei ſint (§. 153.) proportionalia areis quas mobile radiis ad centrum ductis deſcribit; erit proinde tempus per curvæ arcum quemlibet AB (ſumpto initio a vertice A) proportionale rectangulo $AR \times AT$, ſive (ob AR conſtantem) proportionale tangenti circuli genitoris AT; & quadratum temporis per arcum AB proportionale quadrato tangentis AT, ſeu differentiæ quadratorum $ST^2 - SA^2$, ſeu $SB^2 - SA^2$. Vide §. 269. Alias temporum, & velocitatum proportiones, quæ ex dictis colligi poſſunt, curioſis lectoribus inveſtigandas relinquimus.

AR-

## ARTICULUS II.

§. 301. Poſitis iis quæ §. 280, 281, & 282 dicta ſunt, ſit angulus projectionis SAP æqualis dato angulo SAR: erit in hac hypotheſi $dy = \frac{cdr}{r}$, ſive $c = \frac{rdy}{dr}$ = ſubtangenti: Curva ergo quæ a Projecto deſcribitur erit ſpiralis hyperbolica, cujus ſubtangens æquatur rectæ conſtanti SR (c).

Fig. 77.

Ut vero curvæ hujus conſtructionem methodo a nobis in ſuperioribus (§. 283.) adhibita inveſtigemur, deſcribatur centro S, intervallo c, hoc eſt SR vel Sr (producta nimirum RS uſque ad datam directionem AP in r, ob angulos SAR, SAr ex ſuppoſitione æquales erit SR = Sr) circulus ROr, qui ſecet radios infinite proximos SB, Sb in punctis V, u; ponaturque elementum peripheriæ Vu = dz, erit SB (r). SV (c). : Bm (dy). Vu (dz) = $\frac{cdy}{r}$, & poſito loco dy ejus valore $\frac{cdy}{r}$, erit

$$dz = \frac{ccdr}{rr};\ \text{ideoque}\ S.dz = S.\frac{ccdr}{rr},$$

hoc eſt $z = \frac{cc}{r} = \frac{SR^2}{SB}$. Eſt autem z arcus circuli OV ſumpto initio a puncto quodam fixo O, quod punctum determinatur ex eo quod curva quæſita tranſire debet per datum punctum projectionis A, ubi radius curvæ r eſt ipſa data altitudo projectionis SA, quæ poſita fuit = a, ac proinde arcus OX qui ab eo radio

dio abſcinditur eſt $= \frac{cc}{a} = \frac{SR^2}{SA}$.

Synthetica ergo conſtructio & demonſtratio ita ſe habet.

§. 302. Centro S intervallo SR ſive Sr deſcribatur circulus ROr, qui ſecet datam projectionis altitudinem SA (productam ſi opus eſt) in puncto X, ex quo puncto ſumatur arcus XO tertius proportionalis poſt SA, & SR; tum ducto ſemper initio a puncto fixo O, ſumatur quilibet alius arcus OV, & in radio SV (producto ſi opus eſt) ſumatur SB tertia proportionalis poſt arcum OV & ſemidiametrum SR, ita ut ſit ſemper rectangulum $SB \times OV$ æquale quadrato SR: erunt puncta B in ſpirali hyperbolica quæ a projecto percurritur.

Cumque deſcripto centro S per punctum B arcu circuli BF [qui occurrat in F rectæ SO productæ in infinitum] ſit SB ad SV ſive ad SR ut arcus BF ad arcum VO, erit $SB \times VO$ hoc eſt $SR^2 = SR \times BF$, ac proinde $SR = BF$: ex quo alia habetur hujus curvæ ſimplicior conſtructio.

Centro S per datum punctum projectionis A deſcribatur arcus circuli AE æqualis datæ rectæ Sr: tum ducta ex centro S per punctum E recta infinita SEH, ex omnibus ejus punctis deſcribantur alii arcus MC, FB, HK &c. æquales & concentrici arcui EA: curva KABCS erit ſpiralis hyperbolica quæ a projecto percurritur.

§. 303. Nam primo curvam hanc eſſe ſpiralem hyperbolicam, cujus ſubtangentes omnes æquantur rectæ Sr ita facile demonſtratur. Radius Sb ſecet in m arcum BF: cumque arcus BF, bf ſint æquales, eamdem rationem habebunt ad arcum Fm; erit nimirum $fb . Fm$ [ſeu $Sb . Sm$] $:: \frac{FB}{O} . Fm$.

Fm. Et dividendo ac convertendo bm. mB : : Sm. Fm, hoc eſt { ſi puncta B, b ſint infinite proxima } bm. mB, ſive BS ad ſubtangentem SZ : : BS. BF : ſubtangens ergo SZ eſt æqualis arcui BF, ſive, ex conſtructione, rectæ conſtanti Sr.

Hanc vero ſpiralem KABCS eſſe curvam, quæ a projecto in caſu noſtro percurritur, demonſtratur ex eo quod §. 280. dictum eſt, curvæ AB proprietatem eam eſſe debere, ut ductis perpendiculis SQ, SP ſuper tangentibus in punctis B, A, ſit SQ. SP : : $\frac{AR}{AS}$. $\frac{DR}{DS}$; quæ proprietas pertinet ad ſpiralem ſupra deſcriptam: Siquidem triangula rectangula ASR, ASr ſimilia & æqualia dabunt $\frac{AR}{AS} = \frac{Ar}{AS}$: item triangula rectangula DSR, BSZ ( quæ ex conſtructione habent latera SD, SR æqualia lateribus SB, SZ ) dabunt $\frac{DR}{DS} = \frac{BZ}{BS}$: atqui $\frac{Ar}{AS} = \frac{Sr}{SP}$, & $\frac{BZ}{BS} = \frac{SZ}{SQ}$: ergo $\frac{Sr}{SP}$. $\frac{SZ}{SQ}$, ſive ( ob Sr = SZ ) SQ. SP : : $\frac{AR}{AS}$. $\frac{DR}{DS}$. Quod E. D.

Temporum & velocitatum proportiones in hac ſpirali hyperbolica, ne nimis prolixi ſimus, ſequenti articulo explicabimus.

AR-

## ARTICULUS III.

§. 304. DEmum poſitis iis quæ dicta ſunt §. 280. 281. & 282. ſit angulus projectionis SAP minor dato angulo SAR, ita ut facto SA (a). SP (b) :: AR $\left(\sqrt{cc+aa}\right)$. n, ſit n minor quam RS (c): In hoc caſu deſcribatur ſuper diametro SR ſemicirculus SNR, in quo ex puncto R applicetur chorda RN = n, eritque $SR^2 - RN^2$, hoc eſt $cc - nn = SN^2$, poſitaque brevitatis cauſſa SN = m, erit $\frac{ndr}{\sqrt{rr - nn + cc}}$, hoc eſt (§. 281.) $dy = \frac{ndr}{\sqrt{rr+mm}}$. Fig. 84.

Porro centro S intervallo SN deſcribatur circulus NMC, qui ſecet radios infinite proximos SB, Sb in V, u; ponaturque elementum peripheriæ Vu = dz; eritque SB (r). SV (m) :: Bm (dy). Vu (dz) $= \frac{mdy}{r} = \frac{nmdr}{r\sqrt{rr+mm}}$; ac proinde ſector circularis infinite parvus VSu $= \frac{mdz}{2} = \frac{nmmdr}{2r\sqrt{rr+mm}} = \frac{n}{m} \times \frac{m^3\, dr}{2r\sqrt{rr+mm}}$.

Hoc differentiale $\frac{m^3\, dr}{2r\sqrt{rr+mm}}$ reducitur ad differentiale ſectoris hyperbolici ponendo r =

O 2 quo-

$\frac{mm}{\sqrt{xx-mm}}$: quoniam enim creſcente r decreſcit alia aſſumpta indeterminata x, erit $dr = \frac{mmxdx}{xx-mm^{\frac{3}{2}}}$, & $\frac{m^3 dr}{2r\sqrt{rr+mm}} = \frac{mmdx}{2\sqrt{xx-mm}}$.

Deſcripta autem centro S vertice M hyperbola æquilatera MT, cujus ordinata ad axem conjugatum TH = x, erit (§. 40.) $\frac{mmdx}{2\sqrt{xx-mm}}$ differentiale ſectoris hyperbolici MST.

Cum igitur ſector circularis VSu æquetur (ut ſupra) $\frac{n}{m} \times \frac{m^3 dr}{2r\sqrt{rr+mm}}$, æqualis etiam erit $\frac{n}{m} \times \frac{mmdx}{2\sqrt{xx-mm}}$; atque adeo horum differentialium ſummæ æquales erunt, ſcilicet ſector circularis OSV (ſumpto initio a circumferentiæ puncto O quod modo determinabitur) æqualis $\frac{n}{m} \times S.\frac{mmdx}{2\sqrt{xx-mm}}$, hoc eſt $\frac{n}{m}$ in ſectorem hyperbolicum MST.

Porro poſuimus r (SB) $= \frac{mm}{\sqrt{xx-mm}}$: eſtque

ex

ex conicis ( ducta ex puncto T hyperbolæ tangente TD, quæ occurrat in D axi conjugato )

$$SD = \frac{SM^2}{SH} = \frac{mm}{\sqrt{xx-mm}}:$$ ergo radius SB æquatur rectæ SD quam ex hyperbolæ axe conjugato abſcindit a centro tangens ducta ab extremitate aſſumpti ſectoris hyperbolici.

Si ergo fiat ut SN (m) ad NR (n) ita quilibet aſſumptus ſector hyperbolicus MST ad ſectorem circularem OSV, ducaturque ex puncto T tangens hyperbolæ TD, atque in SV ſumatur recta SB æqualis SD, erit B punctum curvæ quæſitæ.

Determinatur vero punctum O initium ſectorum circularium ex eo quod curva quæſita tranſire debet per datum punctum projectionis A: quare ſi ex eo puncto ducatur hyperbolæ tangens AL, fiatque ut SN (m) ad NR (n) ita ſector hyperbolicus MSL ad ſectorem circularem CSO, erit punctum O initium a quo ſumi debent ſectores circulares.

Syntheſis ergo hujus problematis ita ſe habet.

§. 305. Fiat ut data projectionis altitudo SA ad perpendiculum SP ita AR ad qhartam proportionalem RN, quæ ( cum in hac hypotheſi anguli projectionis SAP minoris angulo SAR minor eſſe debeat ipſa SR ) aptetur ex puncto R ſemicirculo RNS ſuper diametro RS deſcripto, centroque S deſcribatur per punctum N circulus NMC ſecans SR in M & SA in C: tum centro S vertice M deſcribatur hyperbola æquilatera MLT, quam tangat in L recta AL ducta ex puncto projectionis A, junctaque SL, fiat ut SN ad NR ita ſector hyperbolicus SML ad ſectorem circularem CSO ( poteſt quartum

hoc proportionale eſſe integer circulus CMN, aut duplum, vel triplum integri circuli cum addito etiam ſectore CSO), qui applicetur radio CS verſus partes M contrarias perpendiculo SP. Repertoque hoc modo circumferentiæ puncto fixo O producatur in infinitum directio centralis SA, & ex quolibet ejus puncto D ſupra vel infra projectionem A ducatur DT tangens hyperbolam in T, junctaque ad centrum TS, fiat ſemper ſector hyperbolicus MST ad ſectorem circularem OSV in ratione conſtanti SN ad NR, & in radio SV (producto ſi opus eſt) ſumatur SB æqualis SD. Dico puncta omnia B ita determinata reperiri in curva ſpirali quæſita quam mobile deſcribit.

§. 306. Siquidem poſitis quæ §. 280. dicta ſunt, curvæ AB proprietas ea eſſe debet ut ductis perpendiculis SP, SQ ſuper tangentibus in punctis A, B, ſit $SQ . SP :: \frac{AR}{AS} . \frac{DR}{DS}$; Ea vero proprietas pertinet ad ſpiralem ſupra deſcriptam, quod ita demonſtratur.

Ducantur radii quicumque infinite proximi SVB, Sub; centroque S deſcribantur per B, b, arcus BmD, bd, qui ſecent rectam SA in punctis D, d, ex quibus ducantur ad hyperbolam tangentes infinite proximæ DT, dt; & ex punctis T, t ordinentur ad axem conjugatum TH, th, ducanturque ad centrum TS, tS. Erit ergo ex conſtructione SN ad NR ut ſector hyperbolicus SMT ad ſectorem circularem OSV, itemque ut ſector MSt ad ſectorem OSu, ac proinde ut eorum ſectorum differentiæ, ſcilicet ut TSt ad VSu: Eſt autem (ductis tn perpendiculari ſuper TH, & SE ſuper DT) ſector hyperbolicus infinite parvus TSt dimidium rectanguli SE x Tt, ſeu (ob ſimilia triangula Ttn, SDE)

SDE ) dimidium rectanguli $SD \times Tn$; itemque ſector circularis infinite parvus VSu dimidium rectanguli $SV \times Vu$: Ergo SN . NR :: $SD \times Tn$ . $SV \times Vu$; ac proinde Tn . Vu :: $SV \times SN$ ($SM^2$). $SD \times NR$.

His poſitis, jungantur MD, MH, quæ angulum rectum DMH ex natura hyperbolæ conſtituent, & HM æqualis erit HT; ducatur etiam ſubtangens SZ perpendicularis radio SB: eritque SB . SZ :: bm . mB. Eſt vero ratio bm ad mB compoſita ex quatuor rationibus Prima bm ſeu Dd ad Hh. Secunda Hh ſeu nt ad nT. Tertia nT ad Vu, & demum Quarta Vu ad BM: quarum rationum prima Dd . Hh ( ob $HS \times SD = hS \times Sd$, & ablato $hS \times SD$ communi, $Hh \times SD = hS \times Dd$ ) eadem eſt quæ SD . SH, ſeu $SD^2$ . $SM^2$. Secunda ratio nt . nT eadem quæ DH . HT ( HM ) ſeu DM . MS. Tertia ratio nT . Vu eadem ( ut ſupra demonſtratum eſt ) quæ $SM^2$ . $SD \times NR$. Quarta demum ratio Vu . Bm eadem quæ SV . SB, ſeu SM . SD; quæ quatuor rationes ordine diſpoſitæ hæ ſunt $SD^2$ . $SM^2$, DM . MS, $SM^2$ . $SD \times NR$, SM . SD, componuntque rationem DM . NR: eſt ergo DM . NR ut radius SB ad ſubtangentem SZ: quare quadrando terminos ac componendo erit $DM^2 + NR^2$ ( ſive $DS^2 + SM^2$ ( $SN^2$ ) $+ NR^2$, hoc eſt $DS^2 + SR^2$, ſeu $DR^2$ ). $NR^2$ :: $SB^2 + SZ^2$ ( ſive $BZ^2$ ). $SZ^2$. Eſt igitur DR . RN :: BZ . ZS, ſive: SB . SQ. Eodem modo demonſtrabitur AR . RN :: SA . SP, quod etiam in conſtructione problematis factum fuit. Itaque

$$RN = \frac{SQ \times DR}{SB},$$ ſive ( ob SB = SD ) $$RN = \frac{SQ \times DR}{DS};$$ eademque $$RN = \frac{SP \times AR}{AS}:$$ quare

$\frac{SQ \times DR}{DS} = \frac{SP \times AR}{AS}$, & demum $SQ . SP :: \frac{AR}{AS} . \frac{DR}{DS}$. Quod E. D.

§. 307. Si punctum D ſumatur ſupra punctum projectionis A, punctum T ubi DT tanget hyperbolam cadet inter L & M, punctumque V inter C & O; eoque punctum T ad M, & punctum V ad O propius accedent quo altius ſumitur punctum D, ac demum congruente puncto T cum vertice M, & puncto V cum O, altitudo SD evadet SF infinita, qui ultimus erit radiorum curvæ ſpiralis. Cumque demonſtratum ſit eſſe ubique radium SB ſeu SD ad ſubtangentem SZ ut DM ad conſtantem RN; eumdemque radium SB ſeu SD ad perpendiculum SQ ut DR ad eamdem conſtantem RN; ſintque in puncto F ſeu D infinite alto SD; MD, RD parallelæ inter ſe & æquales; inde fit ut radii infiniti SF ſubtangens & perpendiculum ſint inter ſe & conſtanti RN æquales. Si igitur ex puncto S rectæ SF fiat perpendicularis SY æqualis conſtanti RN, & ex puncto Y ducatur ad SF parallela YW, erit aſymptoton curvæ ſpiralis a projecto deſcriptæ. Cujus quidem curvæ partem ABS, quæ circa centrum S volvitur in infinitas ſpiras deſcribit mobile projectum ſecundum directionem AP; partem vero AK, quæ verſus aſymptoton in infinitum excurrit, deſcribit mobile eadem velocitate in puncto A ſecundum contrariam directionem Ap projectum.

§. 308. Quo minor eſt angulus projectionis SAP (remanente eadem velocitate ſeu (§. 280.) eodem angulo SAR) eo minor eſt recta RN ſeu SY, eoque major ratio SN ad NR, ſeu ſe-

ctc-

ctorum hyperbolicorum ad ſectores circulares: Et ſi angulus SAP ſit nullus, hoc eſt ſi mobile in puncto A projiciatur ſecundum directionem centralem ſurſum aut deorſum, recta RN ſeu SY diſtantia aſymptoti a centro erit nulla, ſemidiameter SM tum circuli tum hyperbolæ æquilateræ erit ipſa SR, & ratio SN ad NR hoc eſt ſectorum hyperbolicorum ad circulares erit infinita, ideoque punctum O conveniet cum puncto C, & puncta omnia B cum punctis D, ſcilicet ſpiralis curva SBAK abibit in rectam SA.

§. 309. Viceverſa quo major eſt angulus projectionis SAP ( remanente item eadem velocitate ſeu eodem angulo SAR ), eo major erit recta RN ſeu SY: & aucto angulo projectionis SAP donec evadat æqualis angulo SAR, ut in hypotheſi artic. 2. §. 301. punctum N coincidet cum centro S, recta RN ſeu SY erit æqualis RS, & circulus NMC redigetur ad centrum S, & hyperbola MT ad ſuum axem SR: in quo caſu radius SB ſeu SD ad ſubtangentem SZ [ quæ ratio ſemper æquatur [ §. 306. ] rationi DM ad NR ] erit ut DS ad SR: ubicumque ergo ſumatur punctum B erit ſemper ſubtangens SZ æqualis rectæ conſtanti SR, & curva SBA evadet ſpiralis hyperbolica.

§. 310. Quod ſi eodem remanente angulo projectionis SAP, minuatur velocitas, ſeu [ quod idem eſt §. 280. ] augeatur SR, augebitur etiam AR, itemque RN ſeu SY: & ſi SR augeatur in infinitum [ ſcilicet ſi velocitas projectionis ſit ea quam mobile acquirit lapſu rectilineo ex infinita diſtantia uti in hypotheſi caſus ſecundi §. 271. ] etiam RN ſeu SY diſtantia aſymptoti a centro erit infinita. Cumque in eo caſu rectæ infinitæ AR, DR evadant inter ſe parallelæ & æquales, eamdem rationem ha-

habebunt ad rectam RN pariter infinitam: Eſt autem ſemper [ ſ. 306. ] AR. RN :: AS SP, & DR. RN :: BS. SQ: Ergo erit AS. SP :: BS. SQ, ideoque curva ABS erit ſpiralis logarithmica, ſive circulus ſi angulus projectionis SAP ſit rectus.

Fig. 77. 78. 83. 84. ſ. 311. In omnibus curvis, quæ in hoc tertio caſu (velocitate ſcilicet projectionis majore quam quæ acquiritur lapſu ex infinita diſtantia) deſcribuntur, velocitas in quolibet puncto B, ſeu in puncto æquealto D eſt proportionalis $\frac{DR}{DS}$: & in ſpiralibus logarithmicis, ſive in circulis, in quibus SR eſt infinita, etiam DR evadit infinita & proinde conſtans, adeoque velocitas in B erit proportionalis $\frac{1}{DS}$, hoc eſt reciproca altitudinis SB. Quod ſi curvæ hujuſmodi diverſæ ſint, quarum punctum R ſeu ſublimitas negativa SR diverſa ſit, erit velocitas in quolibet puncto B ſeu D (ſ. 87.) proportionalis $\frac{DR}{DS \times SR}$; adeoque in eadem altitudine SD erit proportionalis $\frac{DR}{SR}$: In ſpiralibus autem logarithmicis, & in circulis, ubi DR & SR ſunt infinitæ, parallelæ, & æquales, erit $\frac{DR}{SR}$ = unitati: Si ergo comparetur velocitas in quolibet puncto B cujuſcumque curvæ AB cujus ſublimitas negativa SR, cum velocitate in eadem altitudine SB ſpiralis logaritmicæ, aut cum velocitate qua deſcribitur circulus in eadem altitudine SB, erunt hu-

hujuſmodi velocitates inter ſe ut $\frac{DR}{SR}$ ad unitatem, ſeu ut DR [ſive $\sqrt{SB^2+SR^2}$] ad SR: Quod etiam colligitur ex canone §. 169.: Nam æquatio curvæ AB in quacumque hypotheſi hujus tertii caſus reperta eſt §. 281., $pp=\frac{nnrr}{cc+rr}$, quæ differentiata dat $\frac{pdr}{dp}=\frac{cc+rr}{cc}\times r$; adeoque $\frac{pdr}{dp}$ ad r [hoc eſt quadratum velocitatis in quolibet puncto B curvæ SB, ad quadratum velocitatis qua deſcribitur circulus in eadem a centro diſtantia SB) erit ut $\frac{cc+rr}{cc}\times r$ ad r, ſive ut cc+rr ad cc, & velocitates illæ erunt ut $\sqrt{cc+rr}$ ad c, hoc eſt ut $\sqrt{SR^2+SB^2}$ ad SR.

§. 312. Poſita conſtructione §. 306., ducatur etiam Md, eique perpendicularis recta ſeu arcus circuli infinite parvus Da centro M per punctum D deſcriptus: eruntque ſimilia triangula Dda, MdS, & da . dD : : dS . dM : item dD ſeu bm . mB : : bS . SZ : : (§. 306.) dM . RN. ergo ex æquo da . Bm : : dS ſeu bS . RN, & bS × Bm = RN × da; atque dimidium rectanguli bS × Bm, hoc eſt triangulum ſeu area infinite parva BSb æqualis rectangulo dimidiæ RN × da: ſumma ergo arearum BSb, hoc eſt area ſeu ſector ſpiralis ASB æquatur ſummæ rectangulorum dimidiæ RN × da, hoc eſt rectangulo dimidiæ RN in differentiam rectarum MA, MD: adeoque Fig. 84.

que tempus quo mobile percurrit arcum ſpiralis AB proportionale eſt differentiæ rectarum MA, MD; & ad tempus quo percurrit ſpiralem ABS a puncto A uſque ad centrum erit ut MA—MD ad MA—MS.

§. 313. In ſpirali hyperbolica puncta M & N coincidunt cum centro S; adeoque ſector ſpiralis ASB dimidium eſt rectanguli SR$\times$AD, ſeu
Fig. 83. æqualis triangulo ARD: tempora ergo quibus deſcribuntur quicumque ſpiralis hyperbolicæ arcus AB, BC erunt inter ſe ut triangula ARD, DRL, ſeu ut eorum baſes AD, DL, hoc eſt ut differentiæ altitudinum ſeu radiorum quibus arcus illi clauduntur SA—SB ad SB—SC. & tempora quibus a duobus quibuslibet punctis A, B pervenit mobile ad centrum S dum per ſpiralem hyperbolicam volvitur erunt ut punctorum illorum altitudines SA, SB.

§. 314. Si ad axem SA conſtruatur curva Sqe, cujus quælibet ordinata Dq æquetur perpendiculo SQ ducto ex centro S ſuper BQ tangente ſpiralem in puncto B æquealto ac punctum D, erit curva hæc (§. 184.) ſcala temporum elementarium motus rectilinei per axem AS corporis in puncto A impulſi per directionem centralem eadem velocitate projectionis qua deſcribitur ſpiralis ABS: & tempus quo motu curvilineo deſcribitur quilibet ſpiralis arcus AB erit ad tempus quo motu rectilineo percurritur quodlibet ſpatium AD ut area ASB ad dimidium areæ eADq.
Fig. 83. 84.

§. 315. Porro jungatur Rd; centroque R deſcribatur per punctum D arcus circuli infinite parvus Dc, eruntque ſimilia triangula dDc, dRS, & dc . dD : : dS . dR : : (§. 306.) SQ ſeu Dq . RN. adeoque rectangulum Dq$\times$Dd ſeu area infinite parva qDdg æqualis rectangulo RN$\times$dc; & ſumma illarum arearum, hoc

eſt

eſt area exempli cauſſa eADq æqualis ſummæ horum rectangulorum, hoc eſt rectangulo rectæ conſtantis RN in differentiam rectarum RA, RD. Eſt ergo in ſupradicta hypotheſi motus rectilinei tempus per quamlibet ſpatii partem AD proportionale rectangulo $RN \times \overline{RA - RD}$, ſive (ob conſtantem RN) proportionale differentiæ rectarum RA — RD, quemadmodum §. 89. repertum eſt.

§. 316. Cum ergo area ſpiralis ASB æquetur (§. 112.) dimidio rectanguli $RN \times \overline{MA - MD}$, & area eADq æquetur (§. 315.) rectangulo $RN \times \overline{RA - RD}$: erit proinde area ſpiralis ASB ad dimidium areæ eADq (hoc eſt tempus motus curvilinei per AB ad tempus motus rectilinei per AD) ut $RN \times \overline{MA - MD}$ ad $RN \times \overline{RA - RD}$, ſive ut MA — MD ad RA — RD: & tempus quo corpus a puncto A volvitur per ſpiralem uſque ad centrum ad tempus lapſus rectilinei ex eadem altitudine AS (poſita in utroque motu eadem impulſus velocitate in puncto A) ut MA — MS ad RA — RS. Et ſi punctum M ſit in centro S, ſcilicet in ſpirali hyperbolica (fig. 83.) hujuſmodi tempora ſunt ut SA ad RA — RS.

§. 317. Atqui tempus quo altitudo AS percurritur a corpore proveniente ex ſublimitate negativa SR, ſeu a corpore impulſo in puncto A verſus centrum eadem velocitate projectionis qua deſcribitur ſpiralis ABS, ad tempus quo eadem altitudo AS percurritur a corpore cadente ex quiete in eodem puncto A eſt (§. 90.) ut RA — RS ad $\frac{SA^2}{SR}$: Ergo ex æquo tempus quo Fig. 84.

cor-

corpus a quolibet puncto A volvitur per ſpiralem uſque ad centrum ad tempus quo ex quiete in eodem puncto A decidit motu rectilineo uſque ad centrum eſt ut MA—MS ad $\frac{SA^2}{SR}$:

Et ſi punctum M ſit in centro S, ſcilicet in ſpirali hyperbolica (fig. 83.) hujuſmodi tempora ſunt ut SA ad $\frac{SA^2}{SR}$, hoc eſt ut SR ad SA.

Fig. 83. ſ. 318. Spiralis hyperbolicæ area SABS æquatur (ſ. 313.) triangulo ASR: eſt vero hoc triangulum ASR ad dimidium quadrati AS ut SR ad SA: Ergo tempus converſionis per ſpiralem ABS ad tempus lapſus liberi ex eadem altitudine AS eſt etiam ut area ipſa converſione deſcripta SABS ad dimidium quadrati AS. Cumque in motu curvilineo areæ deſcriptæ circa centrum ſint (§. 153.) ut tempora quibus deſcribuntur: & in hoc motu rectilineo tempora lapſus liberi ex diverſis altitudinibus uſque ad centrum ſint (§. 79.) ut quadrata altitudinum, ſeu ut eorum quadratorum dimidia: inde colligitur tempus quo deſcribitur arcus quilibet AB ſeu ſector ASB ſpiralis hyperbolicæ eſſe ad tempus lapſus liberi ex qualibet altitudine exempli cauſſa LS ut ſector ipſe ſpiralis ASB ad dimidium quadrati LS.

Hoc idem valet in circulo: circulus enim eſt ſpiralis hyperbolica, cujus ſubtangens eſt infinita, in qua quidem ſpirali ſpiræ ſingulæ ſunt peripheriæ concentricæ quæ aream omnem circa centrum complent: ideoque tempus quo in hac lege virium deſcribitur quilibet arcus ſeu ſector circularis eſt ad tempus lapſus liberi ex ejus peripheria ad centrum, ut ſector ipſe circularis ad dimidium quadrati ſemidiametri, ſeu

ut

ut arcus deſcriptus ad ſemidiametrum, ſcilicet ut ſpatia ipſa percurſa; quemadmodum etiam repertum eſt §. 279.

Si diverſe ſint ſpirales hyperbolicæ, aut diverſi circuli circa idem centrum virium: tempora quibus diverſi arcus ſeu ſectores tam in ſpiralibus quam in circulis deſcribuntur, ad tempus lapſus liberi rectilinei ex qualibet altitudine ad libitum aſſumpta uſque ad centrum ſunt (§. 318.) ut ſectores illi ad dimidium quadrati aſſumptæ altitudinis: Ergo ex æquo tempora illa erunt inter ſe ut ſectores ipſi qui deſcribuntur: *Itaque* ſectores omnes (tam in eadem quam in diverſis ſpiralibus hyperbolicis, ſive circulis quomodocumque inter ſe comparentur) æquali tempore deſcripti erunt æquales quod in circulis demonſtratum etiam eſt §. 276.

## SECTIO II.

*Deſcribitur curva, quæ vi centrifuga cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurritur a projecto datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.*

§. 320. Sit S centrum virium, A punctum projectionis, AP ejusdem directio, velocitas vero ſit ea quam mobile acquireret in eodem puncto A ſi ex quiete in dato quodam puncto R per RA in eadem lege vis centrifugæ motu rectilineo libere moveretur. Conſtat ex dictis §. 91, in hoc motu rectilineo corporis ex quiete in puncto R libere a centro virium centrifugarum S recedentis per RAD, quadrata velocitatum in punctis quibuslibet Fig. 85.

A, D eſſe ut $\frac{SA^2 - SR^2}{SA^2}$ ad $\frac{SD^2 - SR^2}{SD^2}$.

Si

Si ergo in hoc motu rectilineo ſumatur quodlibet punctum D, centroque S intervallo SD deſcribatur arcus circuli DB, qui ſecet curvam quæ a projecto percurritur (quæcumque ea ſit) in puncto B, ubi eam tangat recta BQ, ſuper qua ex virium centro demittatur perpendicularis SQ, quemadmodum SP ſuper data directione AP, erit (§. 180.) quadratum velocitatis in A ad quadratum velocitatis in D, hoc eſt

$$\frac{SA^2 - SR^2}{SA^2} . \frac{SD^2 - SR^2}{SD^2} :: SQ^2 . SP^2.$$

§. 321. Si igitur ponantur datæ SA $= a$, SP $= b$, SR $= c$, & indeterminatæ SD $=$ SB $= r$, SQ $= p$, erit $\frac{aa - cc}{aa} . \frac{rr - cc}{rr} :: pp . bb$, quare $\frac{rrpp - ccpp}{rr} = \frac{aabb - ccbb}{aa}$. Quod ſi (ducta ſuper SA ex puncto R perpendiculari RT, quam ſecet in T circulus centro S per A deſcriptus) fiat SA $(a)$ . SP $(b)$ :: RT $(\sqrt{aa - cc})$ . RG $= \frac{b\sqrt{aa - cc}}{a}$, quoniam SP non eſt major SA, non erit RG major RT: ponatur vero brevitatis cauſſa RG $= n$, eritque $\frac{rrpp - ccpp}{rr} = nn$, ſeu $pp = \frac{nnrr}{rr - cc}$. Quænam porro ſit curva quæ hanc habeat æquationem, & quomodo conſtrui poſſit, analyſi a nobis §. 180, & 175. indicata inveſtigandum eſt.

Du-

Ducatur radius Sb infinite proximus radio SB, qui ſecet in m circulum DBm, ponaturque $Bm = dy$, erit $bm = dr$: eſt autem $Bb^2$: $(dr^2 + dy^2)$. $Bm^2$ $(dy^2)$ :: $BS^2$ $(rr)$. $SQ^2$ $(pp) = \frac{rrdy^2}{dr^2 + dy^2}$: ergo ſuperior æquatio evadet $\frac{rrdy^2}{dr^2 + dy^2} = \frac{nnrr}{rr - cc}$, ex qua colligitur $dy = \frac{ndr}{\sqrt{rr - cc - nn}}$. Eſt vero $cc + nn$ $= SR^2 + RG^2 = SG^2$; itaque poſito brevitatis cauſſa $SG = m$, erit $dy = \frac{ndr}{\sqrt{rr - mm}}$.

Deſcripto nunc centro S, intervallo SG circulo GMV, qui ſecet radios SB, Sb in V, u; factoque arcu infinite parvo $Vu = dz$, erit SB $(r)$. SV $(m)$ :: Bm $(dy)$. Vu $(dz) = \frac{mdy}{r}$ $= \frac{mndr}{r\sqrt{rr - mm}}$, ſive $= \frac{n}{m} \times \frac{mmdr}{r\sqrt{rr - mm}}$, quod differentiale idem eſt ac ſupra inventum §. 283, eademque analyſi reperietur integrale. Synthetica ergo conſtructio ac demonſtratio ita ſe habet.

§. 322. Ponatur primo projectio AP perpendicularis, hoc eſt angulus projectionis SAP ſit rectus, in quo caſu conſtructio problematis erit hujuſmodi. Fig. 86.

 Cen-

Centro S, ſemidiametro SA deſcribatur circulus CAL, cui ex dato puncto R ordinetur RG: datæ vero directioni in infinitum productæ (quæ tanget circulum in A) inclinetur ex S quælibet ST ſecans circulum in E fiatque arcus AE ad arcum AV in ratione conſtanti ſemidiametri SA ad ordinatam RG, & ex centro ducatur SVB æqualis ſecanti ST: Dico punctum B eſſe in curva quæſita quæ a projecto percurritur.

§. 323. Demonſtratio eadem eſt quæ §. 285. mutatis mutandis: ſiquidem demonſtrabitur radius curvæ SB ad ſubtangentem SZ eſſe ut AT ad conſtantem RG: & idem radius SB ad perpendiculum SQ ut $\sqrt{BS^2 - SR^2}$ ad RG ſeu ad $\sqrt{SA^2 - SR^2}$; adeoque $SQ^2 . SA^2 :: \frac{SA^2 - SR^2}{SA^2} . \frac{SD^2 - SR^2}{SD^2}$. Q. E. D.

§. 324. Quod diximus §. 287. hic etiam aptari poteſt, ſcilicet rationem radii ad ſubtangentem (quæ ubique eadem eſt ac tangentis AT ad conſtantem RG) in puncto A, ubi AT eſt nulla, eſſe infinite parvam, adeoque ſubtangentem radii SA eſſe infinitam, punctumque A eſſe verticem curvæ, ſeu perigæum hujus motus curvilinei; rectam vero SAD eſſe axem ejusdem curvæ, quæ duobus ſimilibus, & æqualibus cruribus hinc inde ab axe in infinitum porrectis continetur.

§. 325. Valet hic etiam quod diximus §. 228, nimirum ſi fiat ut SA ad RG ita quadrans circumferentiæ AC ad arcum AL, cum in hoc caſu ſecans quadrantis SCK ſit infinita atque parallela & æqualis tangenti ATK, erit proinde

ra-

radius curvæ SLF infinitus & æqualis tangenti ATK; atque adeo ſubtangens, quæ radio infinito SLF correſpondet, erit (§. 323.) æqualis rectæ conſtanti RG: Si ergo radio SLF ducatur ex puncto S perpendicularis SY æqualis conſtanti RG, & ex puncto Y recta YW parallela radio SF, erit SY ſubtangens radii infiniti SF, & YW curvæ aſymptoton. Alterius curvæ cruris aliud erit aſymptoton ſimiliter poſitum: quæ duo aſymptota ſe interſecabunt in axe SA, angulumque comprehendent, cujus menſura eſt duplum arcus AL; adeoque ſi radius circuli SA ſit duplus conſtantis RG angulus aſymptoticus erit rectus.

§. 326. Si producatur SY uſque ad circumferentiam circuli in X, eidemque ex puncto X agatur perpendicularis XM, quæ parallela erit radio infinito SF; dein centro S per ſingula rectæ SF puncta deſcribantur arcus concentrici FI, HB, gb &c, qui ſinguli ad arcus inter parallelas SF, XM comprehenſos habeant rationem conſtantem SY ad SX; nimirum ut ſit SX. SY :: LX. LA :: gO. gb :: HN. HB :: FM. FP &c. orietur curva AbBI, quæ eadem eſt ac ſupra deſcripta. Cujus rei demonſtratio legi poterit §. 290, eadem quippe eſt, eademque verba ad hanc figuram 86. aptari poſſunt: hæc enim curva non in alio ab illa differt quam in hoc quod ibi ratio conſtans SX ad SY (in qua ratione arcus ſumendi ſunt) eſt minoris inæqualitatis, hic vero majoris inæqualitatis, uti optime animadvertit cl: Bernoullius loco ſupra citato in actis lipſ: an: 1713. menſis martii §.68; quod tamen non adnotavit Doctiſs: Newtonus lib: 1. Prop: 41. Coroll: 3.

§. 327. Quo minor eſt ſublimitas RA, ſeu quo minori velocitate mobile projicitur in A,

eo minor erit ordinata RG, eoque major ratio SA ad RG, ſeu quadrantis peripheriæ AC ad arcum AL, quæ menſura eſt ſemianguli aſymptotici, ſeu anguli FSD, quem poſtremus radius SF aſymptoto YW parallelus facit cum axe SD. Quod ſi ſublimitas RA ſit nulla, hoc eſt nulla velocitas projectionis in puncto A, angulus FSD erit nullus, & radius FS, atque aſymptoton YW, curvaque ipſa ABI congruent cum axe AD. Si vero ſublimitas RA æquetur SA, hoc eſt ſi mobile projiciatur velocitate infinita, quam in puncto A acquireret motu rectilineo ex centro S per SA, in eo caſu quoniam RG æquatur SA, etiam arcus AL æquabitur quadranti AC; & radius SF congruet cum recta SP, aſymptoton vero YW, & curva ABI abibunt in tangentem circuli AP, quæ eſt directio projectionis, quam in eo caſu velocitatis infinitæ mobile percurret.

§. 328. Hactenus in ſynthetica demonſtratione mobile poſuimus perpendiculariter projectum. Verum ſi in puncto A projiciatur ſecundum directionem AP, ſeu Ap directioni centrali AS inclinatam ita ut perpendiculum SP minor ſit altitudine SA. In eo caſu ducta ex dato puncto R ſuper SA perpendiculari RT, quam ſecet in T circulus centro S, intervallo SA deſcriptus; fiat ut SA ad SP ita RT ad RG; quæ proinde erit minor RT; centroque S intervallo SG deſcribatur circulus GMV, quem tangat in L recta AL ducta ex puncto projectionis A, fiatque ut SM ad RG ita arcus ML ad arcum MO; erit punctum O vertex curvæ OA quæ a projecto percurritur; quæque eadem eſt quæ ſupra eademque conſtructione (§. 322.) deſcribitur, cujus circulus genitor eſt OMG, ratio conſtans SM ad RG;

Fig. 85.

Tran-

Tranſit verò hæc curva per datum punctum projectionis A, quandoquidem AL eſt tangens circuli genitoris; factumque eſt ut SM ad RG ita arcus ML ad arcum OM. Item tanget hæc curva datam directionem AP, quandoquidem factum eſt ut radius AS ad perpendicularem SP ita RT ad RG; ſeu ita $\sqrt{SA^2 - SR^2}$ ad $\sqrt{SO^2 - SR^2}$; quæ eſt (§. 323.) regula tangentium hujus curvæ.

§. 329. Si angulus projectionis SAP ſit nullus, nulla erit recta RG, & circuli genitoris radius erit SR, in quo caſu conſtructio §. præcedentis dabit punctum O in ipſo puncto R; quod erit vertex ſeu perigæum curvæ quæ congruet cum recta AR; ſcilicet ſi mobile ex quiete in puncto R libere a centro S recedat per RA, & in puncto A velocitate ibi acquiſita verſus centrum impellatur, deſcribet eamdem AR, punctumque R erit hujus rectilinei motus perigæum. Quod in omni motu centrali evenit; quos enim velocitatis gradus mobile motu naturali acquirit, eoſdem contrario violento motu deperdit.

§. 330. Poſita conſtructione §. 322, eadem demonſtratione qua uſi ſumus §. 299, & 300. demonſtrabitur, aream ASB axe SA, radio SB, Fig. 86.
& curva AB comprehenſam, æqualem eſſe rectangulo dimidiæ conſtantis RG in tangentem circuli genitoris AT: atque adeo quadratum temporis motus curvilinei per arcum quemlibet AB (ſumpto initio a vertice A) proportionale eſſe differentiæ quadratorum $SB^2 - SA^2$. Colligi poſſunt ex dictis aliæ temporum & velocitatum proportiones, quas curioſis lectoribus inveſtigandas relinquimus; fortaſſe enim ni-

mium præciſe hæc a nobis tractantur, at puto non ſine fructu eorum qui perſpicuam facilitatem in analyticis geometriciſque ſpeculationibus deſiderant.

*FINIS.*

# INDEX PROPOSITIONUM.

## LIBER PRIMUS.

DE *Motu Corporum Rectilineo in mediis non reſiſtentibus.* pag. 1

PROP. I. *Theorema. Scala virium eſt ut quadratum velocitatis, quam reperitur corpus habere, poſtquam peragravit ſpatium, ad quod ſcala refertur.* 2

PROP. II. THEOR. *Scala temporum elementarium eſt proportionalis temporibus.* 4

PROP. III. PROBL. *Data lege, ſeu ſcala virium centralium, ſcalas velocitatum, temporum elementarium, & temporum integrorum ab initio motus analytice determinare.* 5

EXEMPLUM I.

*Sit vis Centralis conſtans, qualis eſt gravitas in telluris ſuperficie.* 12

EXEMPLUM II.

*Sit vis Centralis diſtantiæ a centro virium directe proportionalis.* 14

EXEMPLUM III.

*Sit vis centralis quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionalis.* 29

EXEMPLUM IV.

*Sit vis centralis cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionalis.* 47

EXEM-

EXEMPLUM V.

*Sit vis centralis diſtantiæ a centro reciproce proportionalis.* pag. 60

EXEMPLUM VI.

*Sit vis centralis in quacumque multiplicata ratione diſtantiarum a centro.* 62

PROP. IV. PROBL. *Data lege, ſeu ſcala velocitatum, vires centrales analytice invenire.* 68

EXEMPLUM I.

*Sint velocitates in quacumque multiplicata ratione ſpatiorum vel directe, vel inverſe.* 73

EXEMPLUM II.

*Sit velocitas vel ut* $\sqrt{x^m \pm a^m}$, *vel ut* $\sqrt{a^m - x^m}$, *vel ut* $\sqrt{\frac{a^m \pm x^m}{a^m x^m}}$, *vel ut* $\sqrt{\frac{x^m - a^m}{a^m x^m}}$ 73

EXEMPLUM III.

*Sit ſcala velocitatis aut Ellipſis Apolloniana, aut ellipſes aliæ ſuperiorum ordinum.* 76


EXEM-

## EXEMPLUM IV.

*Exprimatur ſcala velocitatum hac æquatione*
$u^r = x^m \times \overline{a + x^n}$ pag. 79

## EXEMPLUM V.

*Determinatur vis centralis in vaſe, ex quo aqua per foramen exit.* 86

PROP. V. BROB. *data ſcala temporum integrorum velocitates, & vires centrales analytice invenire.* 87

## EXEMPLUM I.

*Sit ſpatium in quacumque ratione temporis multiplata.* 91

## EXEMPLUM II.

*Tempus exprimatur per curvam parabolicam cujuſcumque ordinis cujus abſciſſa ſit ſpatium.* 92

## EXEMPLUM III.

*Tempus exprimatur per aream ejuſdem curvæ.* 94

## LIBER SECUNDUS.

DE *Corporum Motu Curvilineo.* pag. 97

PROP. I. PROBL. *Data orbita, in qua volvatur corpus, reperire legem vis centralis tendentis ad punctum quodcumque datum.* 105

PROP. II. PROBL. *Data lege vis centralis tendentis ad datum punctum, reperire orbes, ſeu curvas trajectorias, quas corpus ea vi deſcribere poteſt.* 112

PROP. III. THEOR. *Eadem vi centrali poſita ſi duo corpora in eadem a centro diſtantia habent velocitates æquales, habebunt ſemper, quaſcumque vias teneant.* 116

PROP. IV. PROBL. *Data lege vis centralis tendentis ad datum punctum, projiciatur corpus in dato loco cum data velocitate ſecundum datam directionem, reperire trajectoriam, quam deſcribit.* 121

EXEMPLUM I.

*Revolvatur Corpus in ſpirali logarithmica.* 125

EXEMPLUM II.

*Revolvatur Corpus in Spirali hyperbolica.* 125

EXEMPLUM III.

*Revolvatur Corpus in Spirali cujuſcumque generis.* 126

EXEMPLUM IV.

*Revolvatur Corpus in Ellipſi.* 128

EXEM-

## EXEMPLUM V.

*Revolvatur Corpus in hyperbola.* pag. 129

## EXEMPLUM VI.

*Revolvatur Corpus in circulo,* 129
In ſuperioribus exemplis punctum ad quod tendit vis centripeta eſt centrum Curvæ.

## EXEMPLUM VII.

*Revolvatur Corpus in Coniſectione, reperire legem vis centralis tendentis ad focum.* 135

## EXEMPLUM VIII.

*Revolvatur Corpus in Coniſectione; reperire legem vis centralis tendentis ad punctum quodcumque datum ſive intra, ſive extra Sectionem.* 136

## EXEMPLUM IX.

*Sola Ellipſis, & hyperbola deſcribi poſſunt, ſi vis centtipeta, aut centrifuga ſit proportionalis diſtantiæ a centro.* 139
SECTIO I. *Determinantur curvæ, quæ vi centripeta diſtantiis a centro virium proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.* 140
SECTIO II. *Deſcribuntur Curvæ, quæ vi centrifuga diſtantiis a centro virium proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.* 171

## EXEMPLUM X.

*Quæ Curvæ deſcribi poſſunt, ſi vires ſint proportionale*

nales reciproce quadratis diſtantiarum a centro.

SECTIO I. Deſcribuntur curvæ, quæ vi centripeta quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.

SECTIO II. Deſcribuntur Curvæ, quæ vi centrifuga quadratis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis.

## EXEMPLUM XI.

Quæ curvæ deſcribi poſſunt, ſi vires ſint proportionales reciproce cubis diſtantiarum a centro. 174

SECTIO I. Deſcribuntur Curvæ, quæ vi centripeta cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurruntur a projectis, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis. 175

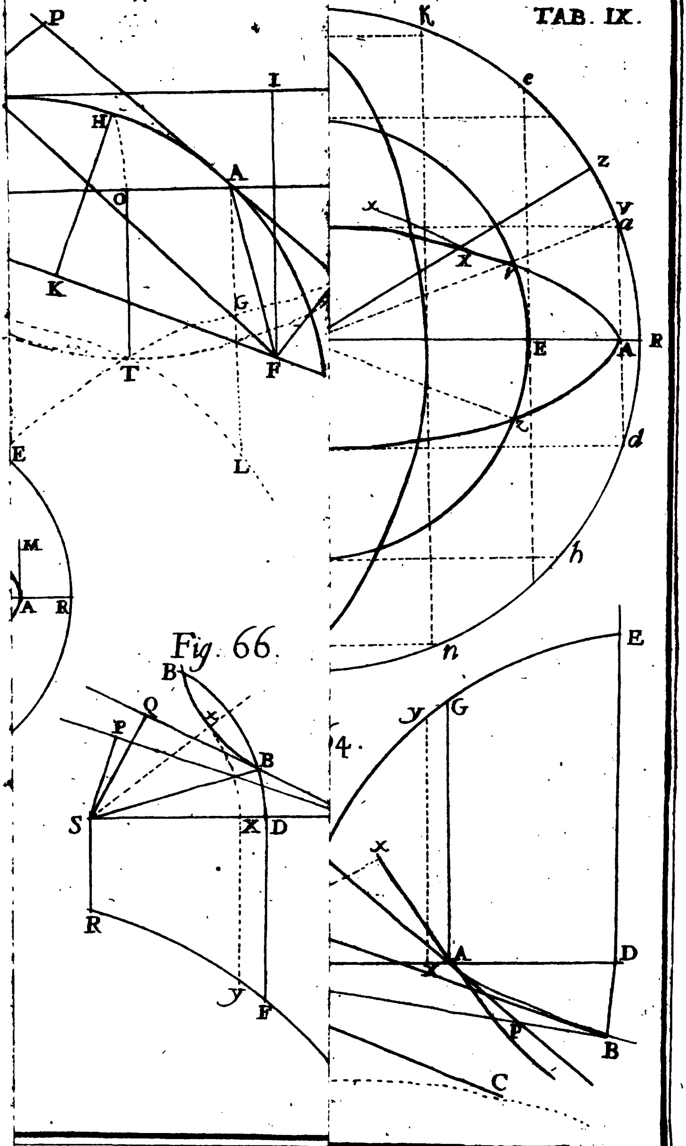
SECTIO II. Deſcribitur Curva, quæ vi centrifuga cubis diſtantiarum a centro reciproce proportionali percurritur a projecto, datis puncto, directione, ac velocitate projectionis. 223

| Errata. | Corrige |
|---|---|
| Ep. ded. pag. v. ver. 14. artiumque: mnium | artiumque omnium |
| Præf. pag. xii. ver. 24. actas | ætas |
| 3 v. 15. Augmentailla | Augmenta illa |
| 4 v. 2. cx | ex |
| v. 16. $S.\ fdg = \frac{}{du}$ | $S.\ fdx = \frac{}{dx}$ |
| 5. v. 16. $dt = \frac{}{u}$ | $dt = \frac{}{u}$ |
| 11 v. 12 iſtu | ictu |
| 16 v. 2 arcolarum | areolarum |
| 16 v. 37 cordoris | corporis |
| 20. $\overset{1}{\underset{2}{Ab =}}$ | $Ab = \frac{1}{2}$ |
| 21 v. 27 puñito | puncto |
| 25 v. 11 $x^{1-}$ | $x^{-1}$ |
| v. 17 nt | ut |
| 26 v. 8 AHGC | AHGB |
| 29 v. 18 $= S.\ \frac{dx}{xx} A : \frac{-f}{x}$ | $S.\ \frac{dx}{xx} = \frac{-1}{a}$ |
| 32 v. 1 rationum | rationem |
| 39 v. 22 hyperbolium | hyperbolicum |
| v. 32. duobus | duabus |
| 45 v. 6 AB | A3 |
| 47 v. 30 $\left(\frac{1}{z^3}\right)$ | $\frac{1}{x^3}$ |
| 52 v. 22. propottionis | proportionis |
| v. 32 Iraque | Itaque |
| 63 v. 14 factiorris | fractionis |
| 68 v. 5 ſive minor | ſive major, ſive minor unitate |

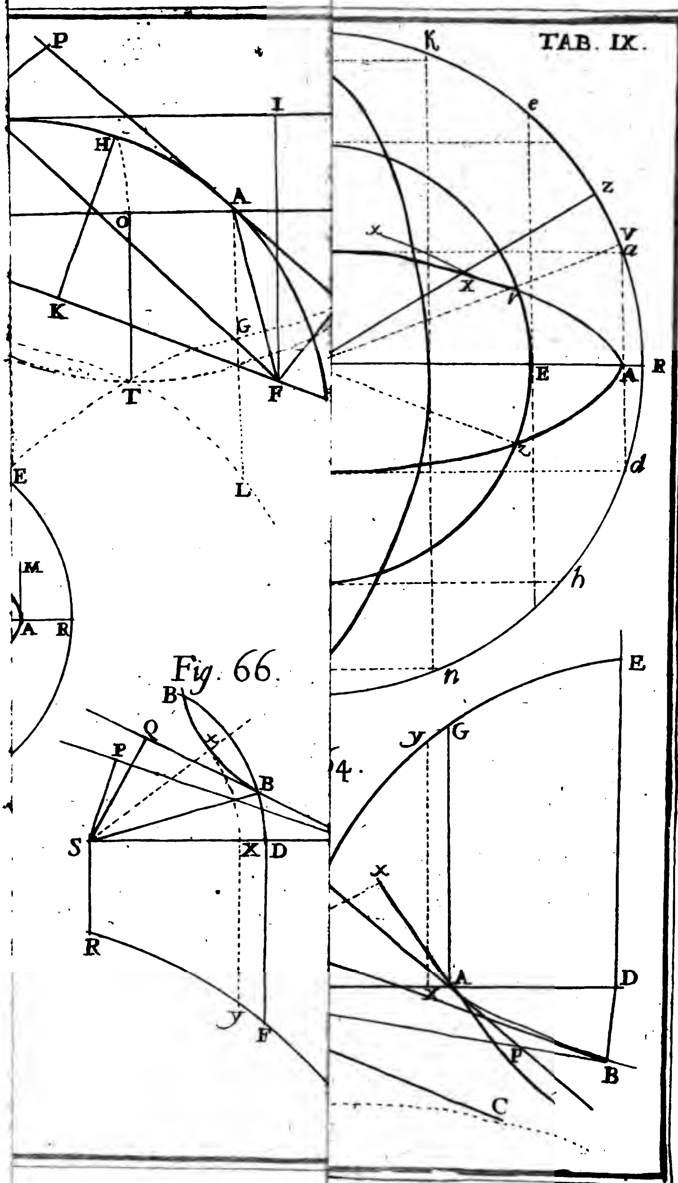
| | | | |
|---|---|---|---|
| 80 | v. 8 | inſcluptum | inſculptum |
| 86 | v. v. 5 | McN | MCN |
| 87 | v. 18 | corpus per AB | Corpus ( Fig. 31 per AB |
| 89 | v. 3 | percuſſi | percurſi |
| | v. 5 | formalis | formulis |
| 103 | v. 32 | periodium | periodicum |
| 113 | v. 4 | $f = \frac{-dp}{2pp}$ | $f = \frac{-dp}{p^3 dr}$ |
| 132 | v. 8 | punctſs | punctis |
| 133 | v. 29 | EAs×p | EA × sp |
| 136 | v. 1 | zpdp | 2pdp |
| 137 | v. 15 | $\frac{1}{SA^2 \times AN^3}$ | $\frac{1}{SA^2 \times AM^3}$ |
| 143 | v. 30 31. | in eodem puncto ea velocitate, quam acquireret in eodem puncto cadendo &c. | in eo puncto ea velocitate quam acquireret in eodem puncto cadendo &c. |
| | v. 33 | proinde | perinde |
| 148 | v. 1 | §. 219. Fig. 36 | Fig. 63 |
| 149 | v. 4 | (aa—cc) : : DE² | (aa—cc). DE |
| 153 | v. 22 | DB² | DE² |
| 157 | v. 24 | quamcum- | quamcumque |
| 162 | v. 27 | arcur | arcus |
| 164 | v. 2 | Ec | Ee |
| | v. 7. | ( ac——a | ( 2c——a |
| 167 | v. 6. | directæ | directe |
| 168 | v. 33 | monſtratis | demonſtratis |
| 170 | v. 9 | requiritur | ſequitur |
| 181 | v. 14 | ducatur | ducantur |
| | v. 20 | jungaturque | junganturque |
| 185 | v. 3 | adc | ad c |
| 199 | v. 1 | Cumquæ | Cumque |
| | v. 31 | quibibet | quilibet |

| | |
|---|---|
| 202 v. 18 punctom | punctum |
| v. 31 curva | curvæ |
| 204 v. 16. aſxmptoton | aſymptoton |
| §. 294. Fig. 84. | Fig. 82. |
| 208 v. 10 deſcribatur centro S, | deſcribatur (Fig. 83. ) centro S |
| 223 v. 4 diverſe | diverſæ |

TAB. IX.



P
I
H
A
O
K
G
T
F
E
L
M
A R
Fig. 66.
B
Q
P
B
S
X D
R
y
F
K
e
z
V
a
x
X
E
A
R
d
h
n
E
y G
4.
x
A
D
B
C


TAB. IX.
P
I
H
A
O
K
G
T
F
E
L
M
A R
K
e
Z
V
a
x
X
r
E
A R
z
d
h
n
B
Q
P
B
S
X D
R
y
F
E
y G
x
A D
X
P
B
C
Fig. 66.

~~[illegible]~~ #6.a

A 547015

UNIVERSITY OF MICHIGAN

3 9015 06359 3027

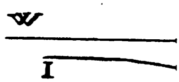






Fig. 79.

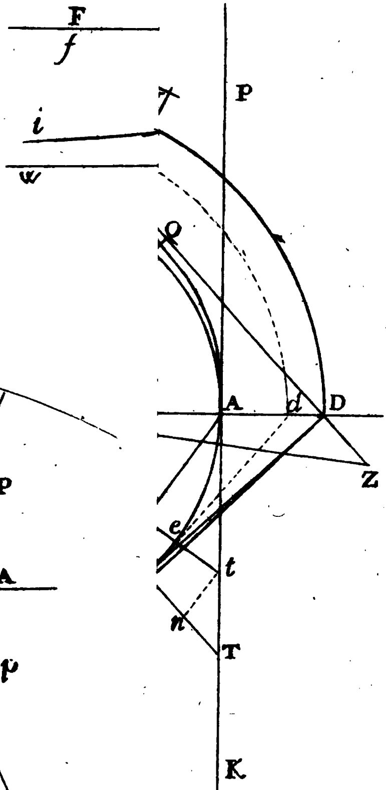
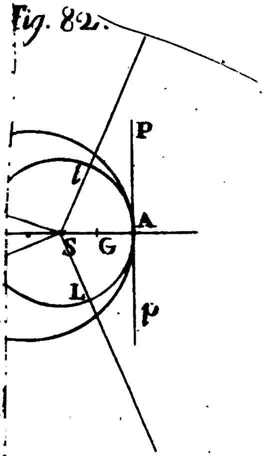



Fig. 82.



TAB. XIV.

Fig

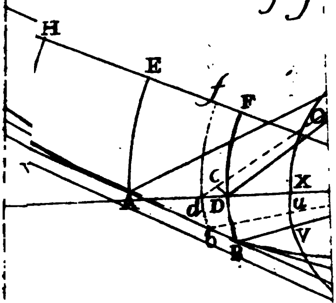
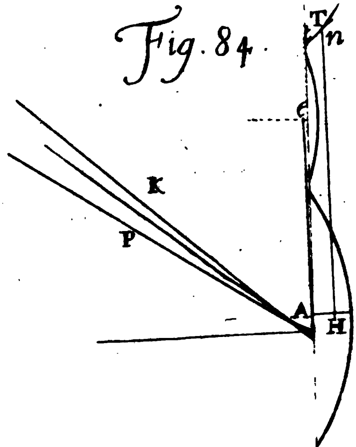



Fig. 84



TAB. XV.

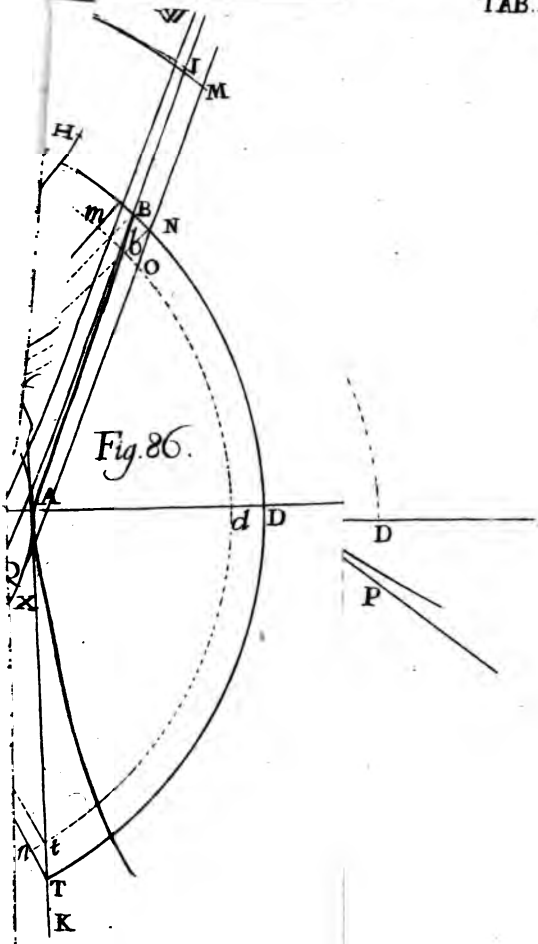



Fig. 86.

TAB. I

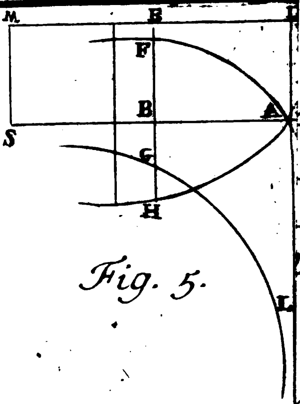


Fig. 5.

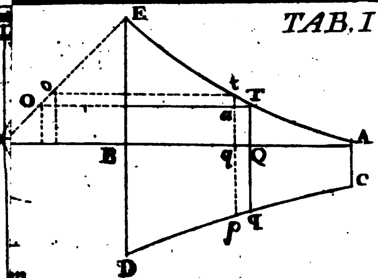
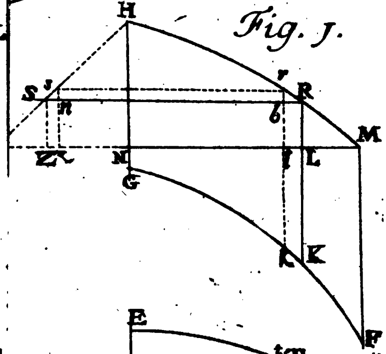
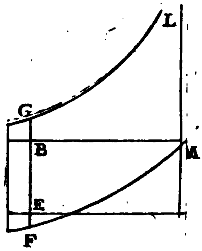


Fig. 1.





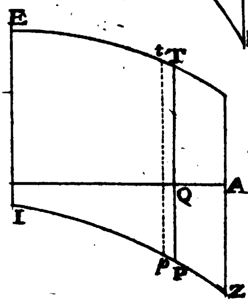


Fig. 2.

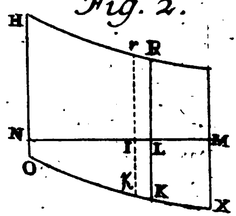
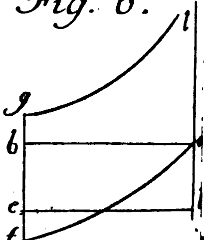
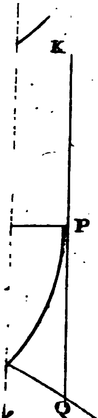


Fig. 6.





ig. 7.

TAB. II.

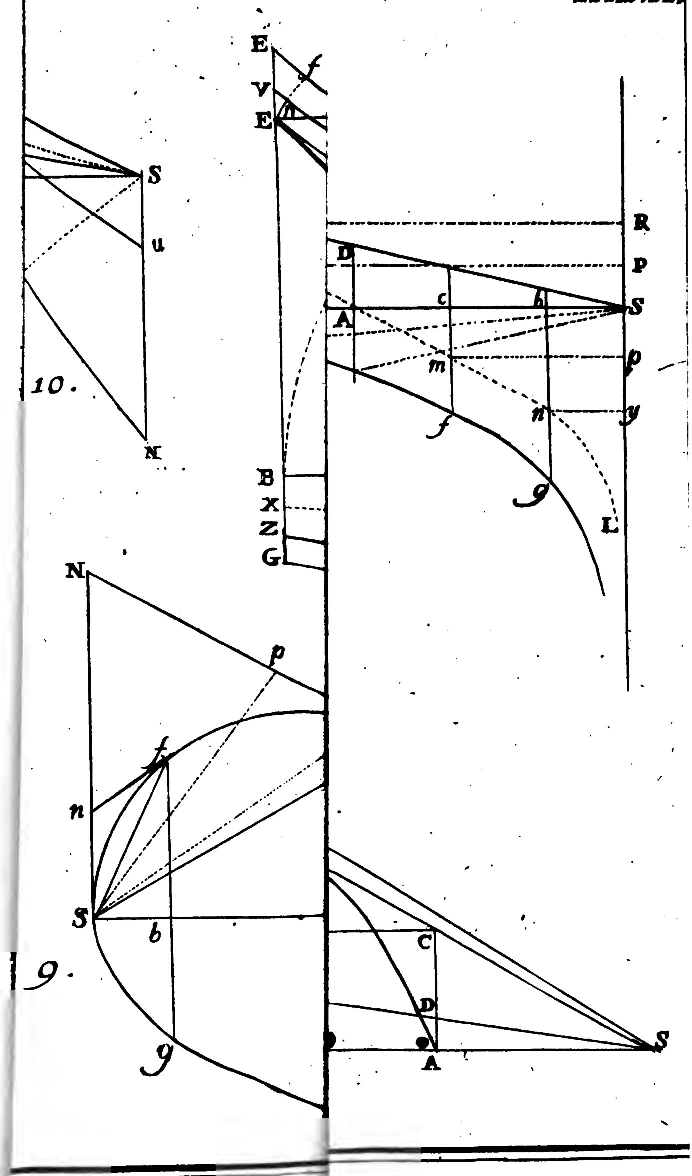





Fig. 20.

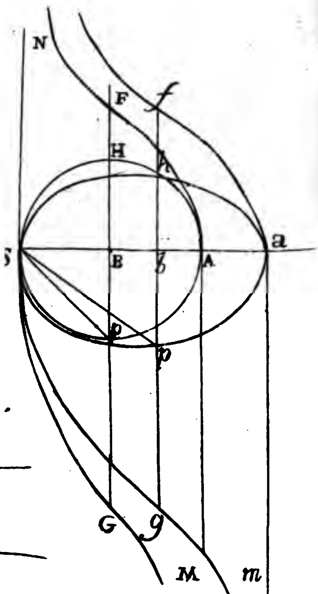



Fig. 19.

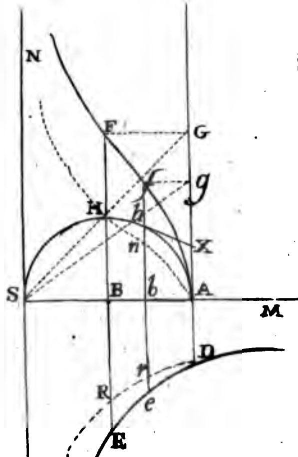



Fig. 15.

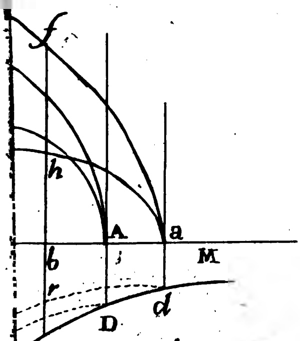
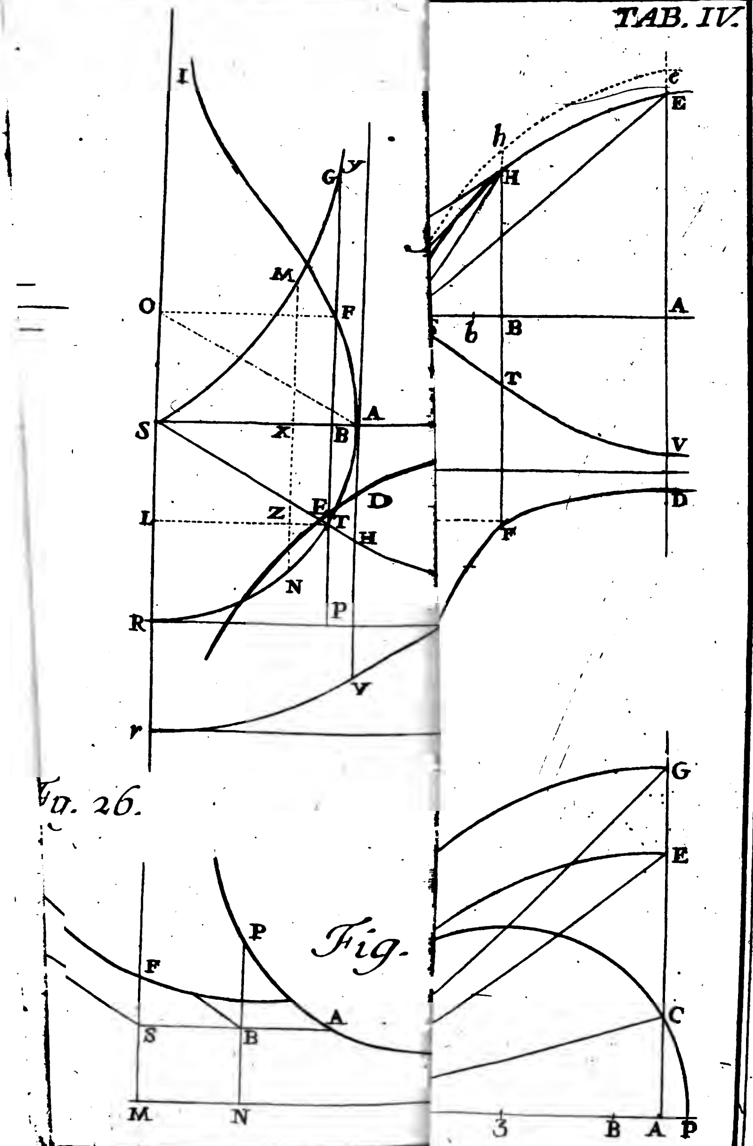
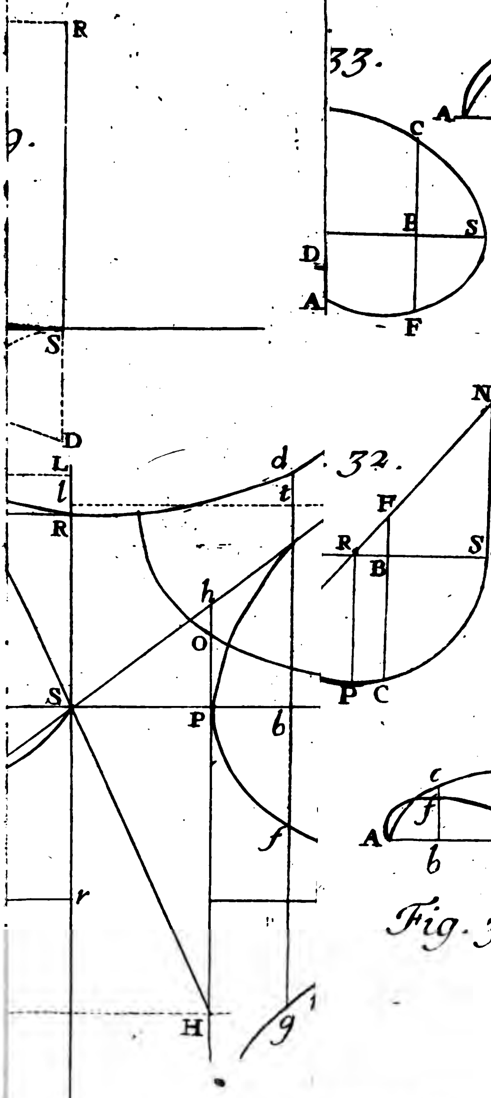



Fig. 16.

TAB. IV.


I
G
y
M
O
F
A
S
X
B
D
L
Z
E
T
H
N
R
P
V
r
e
E
h
H
A
S
b
B
T
V
D
F
ig. 26.
P
Fig-
F
S
B
A
M
N
G
E
C
3
B
A
P

TAB. IIII.




33.

32.

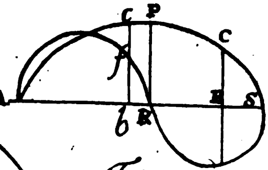



Fig. 35.

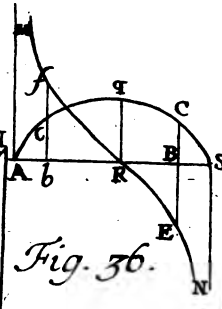



Fig. 36.

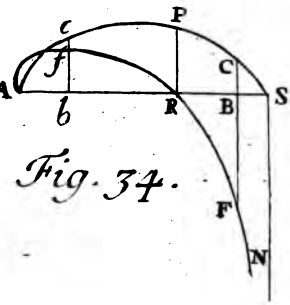
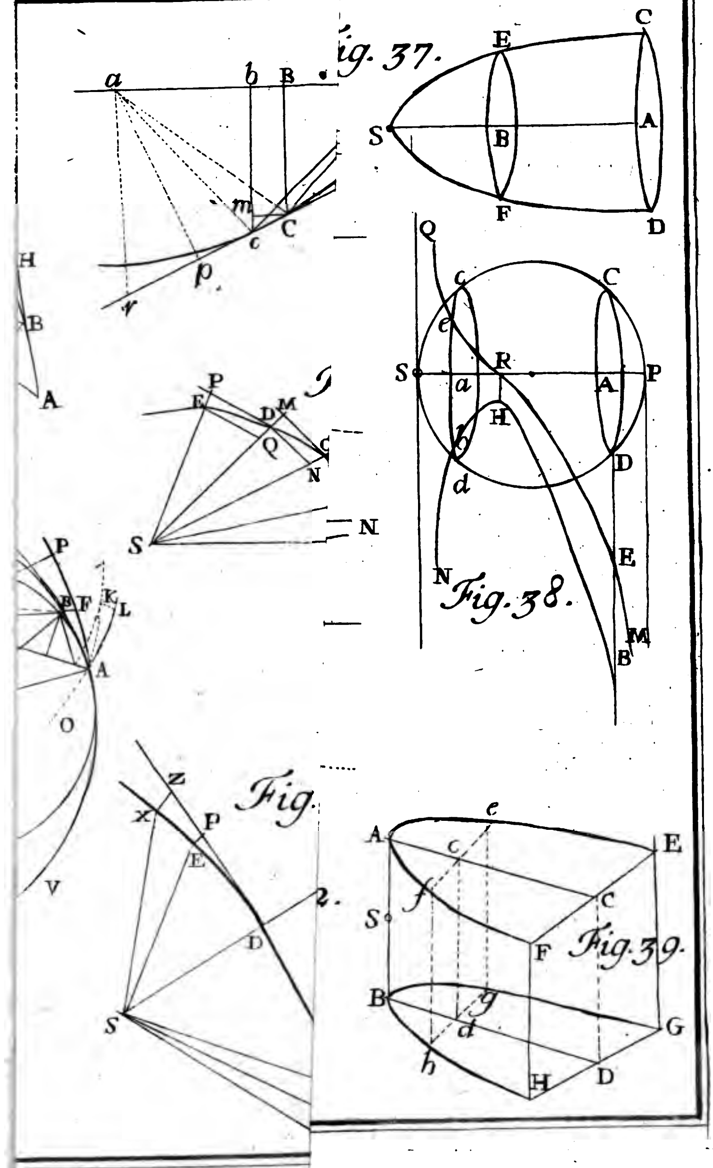
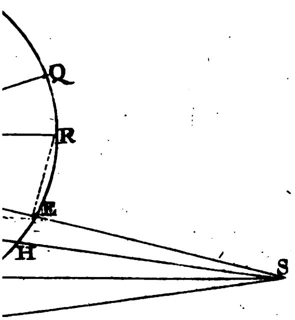



Fig. 34.

TAB. VI.





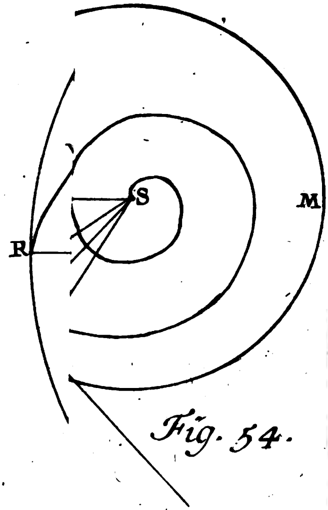
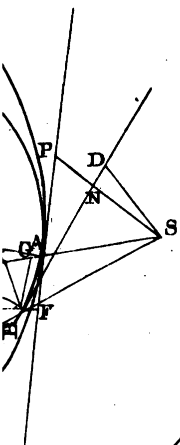
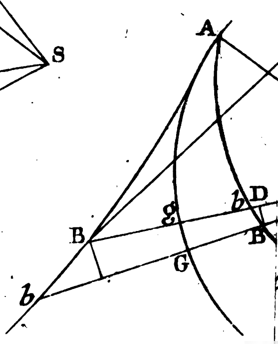




Fig. 54.



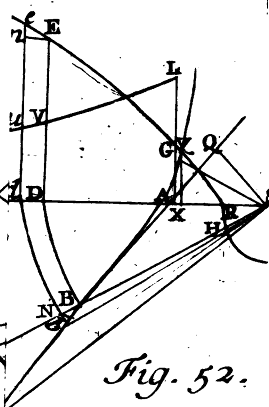




Fig. 52.